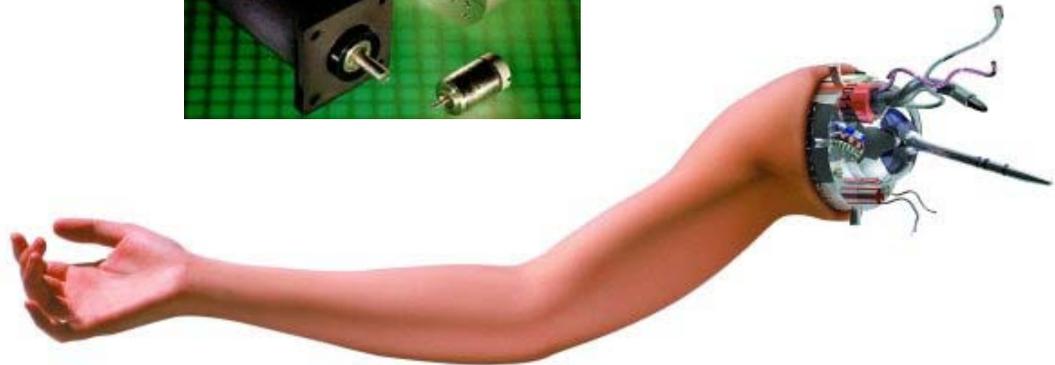




Systemes asservis linéaires





- 1- Les défauts des systèmes commandés
- 2- Structure d'un système asservi
- 3- Les qualités d'un système asservi
- 4- Exemples de réponses d'un système asservi
- 5- La formule de Black
- 6- L'asservissement de position
- 7- Modélisation du moteur à courant continu
- 8- Transmittance du moteur
- 9- Schéma fonctionnel de l'asservissement de position
- 10- Exemple d'asservissement de position
- 11- L'asservissement de vitesse
- 12- Schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse
- 13- Stabilité d'un système linéaire
- 14- Condition d'oscillation d'un système bouclé
- 15- Condition graphique d'oscillation
- 16- Critère graphique de stabilité de Nyquist
- 17- La stabilité sur le diagramme de Bode
- 18- Marge de phase d'un système bouclé
- 19- Réglage de la marge de phase sur Bode
- 20- Exemples de mesures de la marge de phase (1)
- 21- Exemples de mesures de la marge de phase (2)
- 22- Les erreurs dans un système asservi
- 23- Calcul de l'erreur et classe du SA
- 24- Exemple de calcul de l'erreur
- 25- Influence de la classe sur l'erreur
- 26- Le principe des correcteurs
- 27- Le correcteur PD proportionnel dérivé
- 28- Le correcteur à avance de phase
- 29- Le correcteur proportionnel intégral
- 30- Le correcteur à retard de phase
- 31- Le correcteur PID universel
- 32- Efficacité de la correction par PID
- 33- Méthode de réglage du PID
- 34- Exemples de réalisation de PID



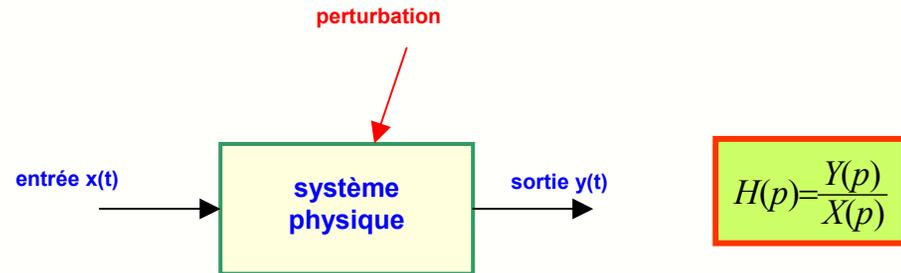


1- Les défauts des systèmes commandés



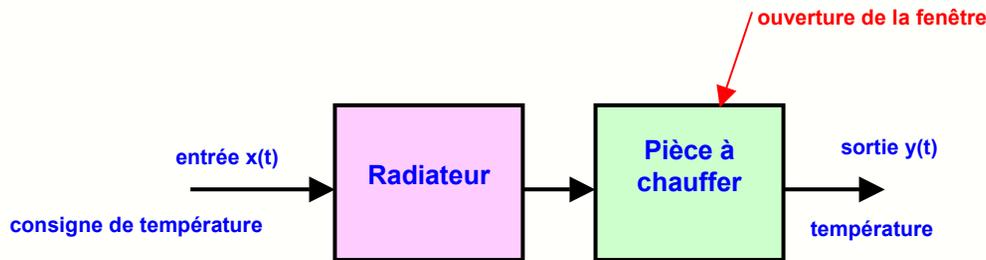
Un **système physique** électronique ou électromécanique **linéaire** est **commandé** par le signal $x(t)$ et fournit la sortie $y(t)$:

- le système est souvent un organe de puissance (chauffage, moteur, vérin ...)
- le signal de commande est en général une tension de quelques volts



Le **défaut** des systèmes commandés est le manque de **fidélité** : une valeur de $x(t)$ ne donne pas toujours la même sortie $y(t)$ à cause des perturbations qui affectent le système.

Exemple : dans le cas du chauffage d'une pièce, l'ouverture de la fenêtre provoque une diminution de la température ambiante et constitue une **perturbation** pour le système de chauffage.



Système idéal :

- consigne $x(t) = X_0$
- température $y(t) = Y_0$

Système réel :

- consigne $x(t) = X_0$
- la température $y(t)$ **fluctue**
- causes : ouverture de porte ou de fenêtre, variation de la température extérieure ...

- à cause des perturbations, la température y varie même si la consigne x est fixe
- on peut modéliser l'influence des perturbations en disant qu'elles font varier la transmittance $H(p)$ du système
- pour maintenir la température de la pièce constante, il faut réajuster en permanence la consigne x
- c'est ce que fait automatiquement un système asservi



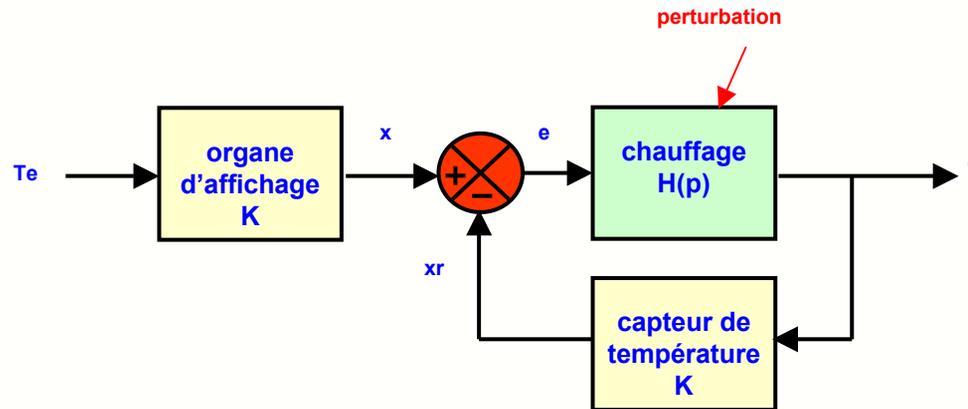
2- Structure d'un système asservi



Un **système asservi** est un système commandé possédant un **dispositif de retour garantissant la fidélité**.

Pour une régulation du chauffage électrique d'une pièce, la température ambiante T est asservie à la température désirée T_e :

- en hiver l'ouverture d'une fenêtre est une perturbation qui fait baisser T et donc x_r
- le signal d'erreur e augmente, ce qui fait augmenter la puissance de chauffe
- la température T remonte automatiquement



- T : température réelle
- T_e : consigne de température
- x : tension image de T_e
- x_r : tension image de T
- e : signal d'erreur

L'organisation générale d'un système asservi est donc la suivante :

- la **chaîne directe** constituée par le système commandé soumis à l'influence des perturbations et manquant donc de fidélité
- la **chaîne de retour ou capteur** qui convertit la grandeur de sortie en une tension appelée signal de retour x_r
- l'**organe d'affichage** qui transforme la valeur désirée ou consigne en tension x
- le **comparateur** qui élabore en permanence le signal d'erreur $e = x - x_r$
- à chaque température correspond une tension : le **dispositif d'affichage et le capteur ont la même transmittance K**

On classe les systèmes asservis en 2 grandes familles :

- les **régulations** : la consigne est constante ou varie par paliers (alimentation stabilisée, régulation de vitesse, de température ...)
- les **asservissements** : la consigne varie continûment (table traçante, boucle à verrouillage de phase...)



3- Les qualités d'un système asservi

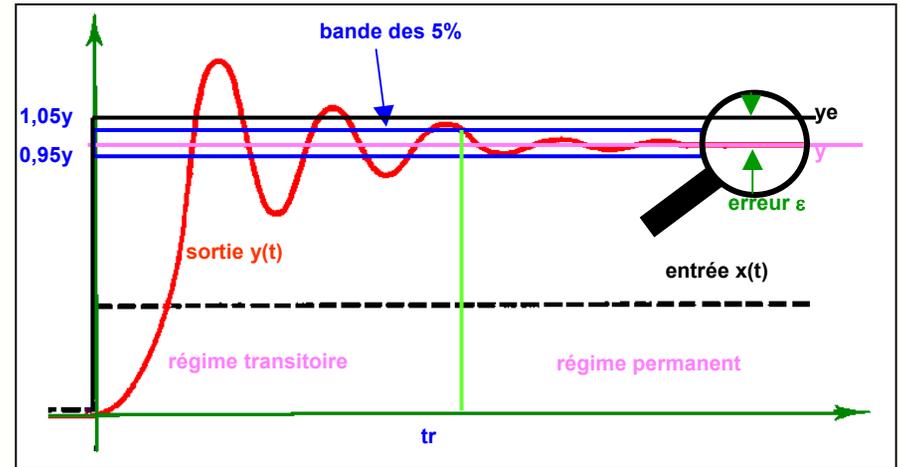
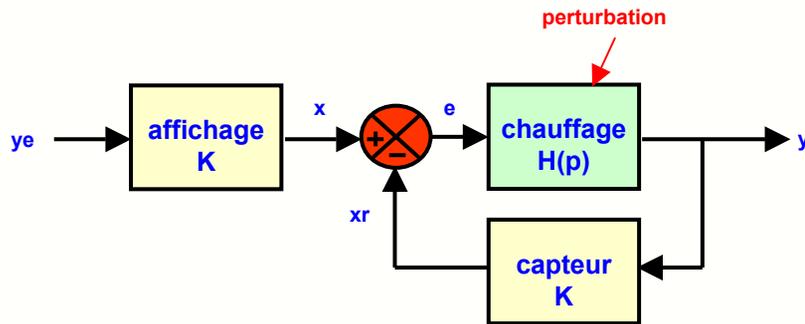


Les performances qu'on demande à un système asservi dépendent de la phase de fonctionnement :

- en régime transitoire, on demande au SA d'être rapide en passant le plus rapidement possible d'un régime permanent à l'autre. On caractérise le régime transitoire par le dépassement et le temps de réponse tr à partir duquel $y(t)$ reste dans la bande des 5%
- en régime permanent (ou établi), on demande au SA d'être précis. En pratique, cette précision n'est jamais absolue et on la caractérise par l'erreur

$$\varepsilon(t) = ye(t) - y(t)$$

⇒ la qualité du régime transitoire s'évalue en général en appliquant au système une entrée de forme particulière : l'échelon.



⇒ l'erreur se mesure en appliquant au système des entrées de formes simples : échelon, rampe...

Asservissement idéal :

- $y = ye$ et $\varepsilon = 0$
- $x = xr$ et $e = 0$

Asservissement réel :

- y différent de ye erreur ε
- x différent de xr signal d'erreur e non nul

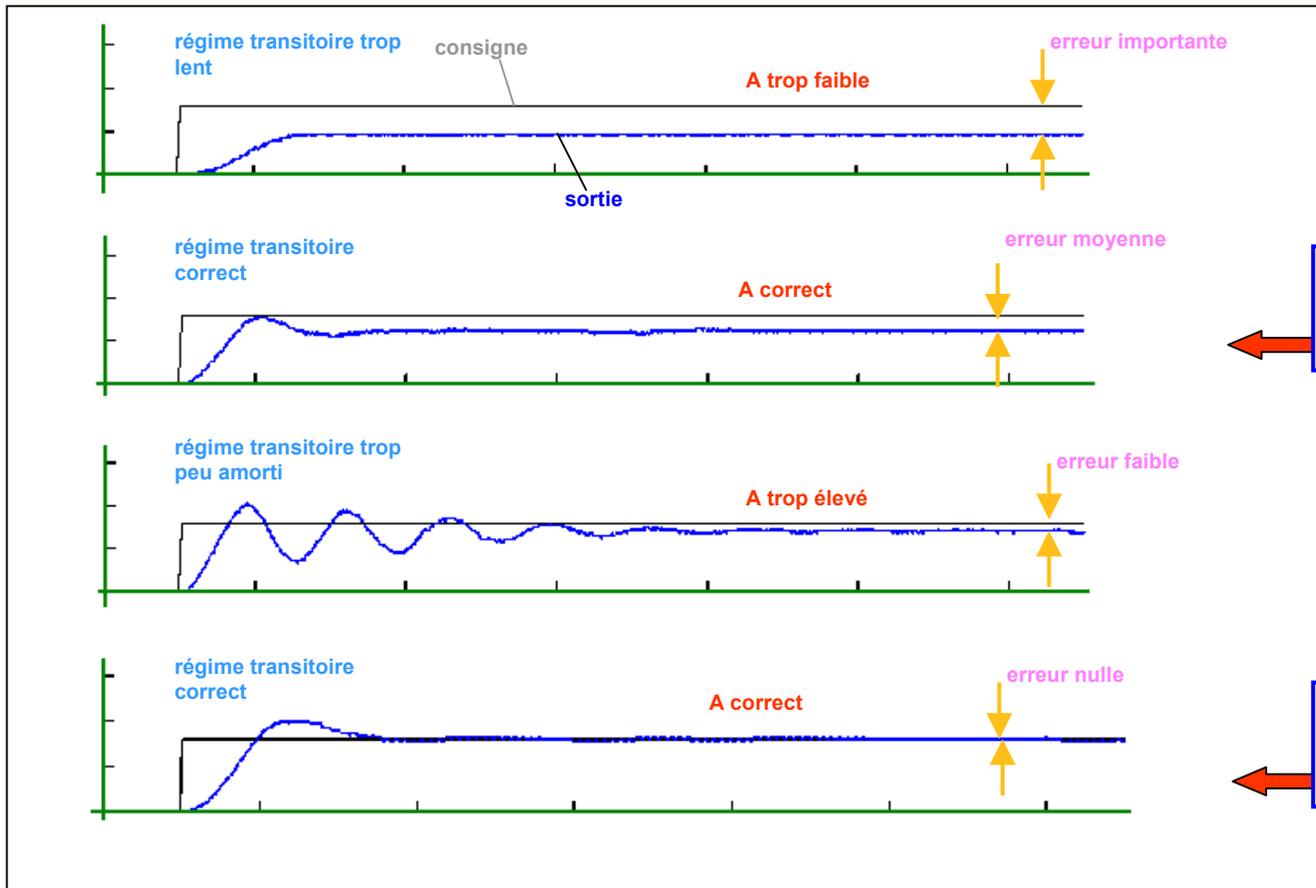
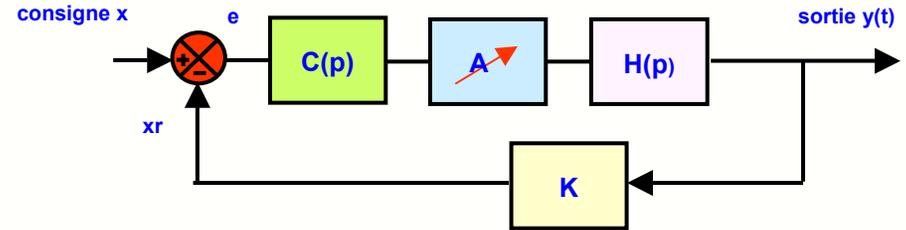
Remarque : pour un asservissement précis, le capteur doit être fidèle et complètement insensible aux perturbations extérieures

4- Exemples de réponses de systèmes asservis



Chaque asservissements comporte dans la chaîne directe :

- un **amplificateur A réglable** agissant sur son régime transitoire et sur son erreur
- éventuellement un correcteur **C(p)** permettant d'améliorer la précision ou la stabilité



Système bien réglé sans correcteur :

- régime transitoire correct
- il reste une erreur statique

Système bien réglé avec correcteur :

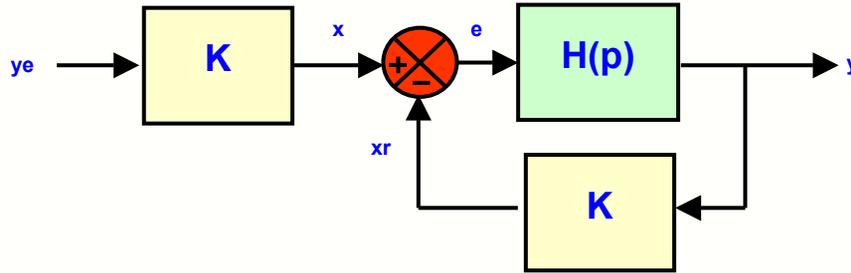
- régime transitoire correct
- erreur statique nulle



5- La formule de Black



La grandeur fondamentale qui caractérise l'asservissement est sa **transmittance en boucle ouverte T(p)**, ou **gain de boucle** :



$$T(p) = \frac{X_r(p)}{E(p)} = H(p).K$$

Lorsque le système est bouclé, la relation entre la sortie Y(p) et l'entrée Ye(p) se calcule facilement :

$$Y(p) = H(p).E(p) = H(p)[X(p) - X_r(p)] = H(p)[K.Y_e(p) - KY(p)] \quad \text{soit} \quad Y(p)[1 + H(p).K] = Y_e(p).H(p).K$$

On en déduit la **transmittance en boucle fermée T'(p)** :

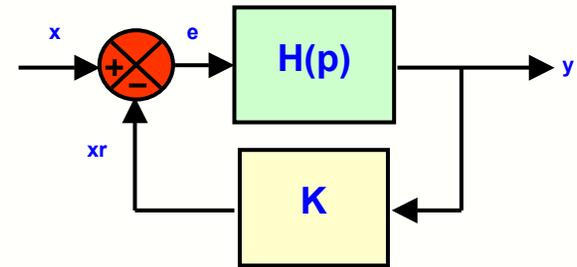
$$T'(p) = \frac{Y(p)}{Y_e(p)} = \frac{H(p).K}{1 + H(p).K} = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

formule de **Black**

Remarque : si l'organe d'affichage est absent, la grandeur d'entrée est directement la tension x fournie par un potentiomètre de consigne.

La transmittance en boucle fermée s'écrit alors :

$$T'(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p).K}$$

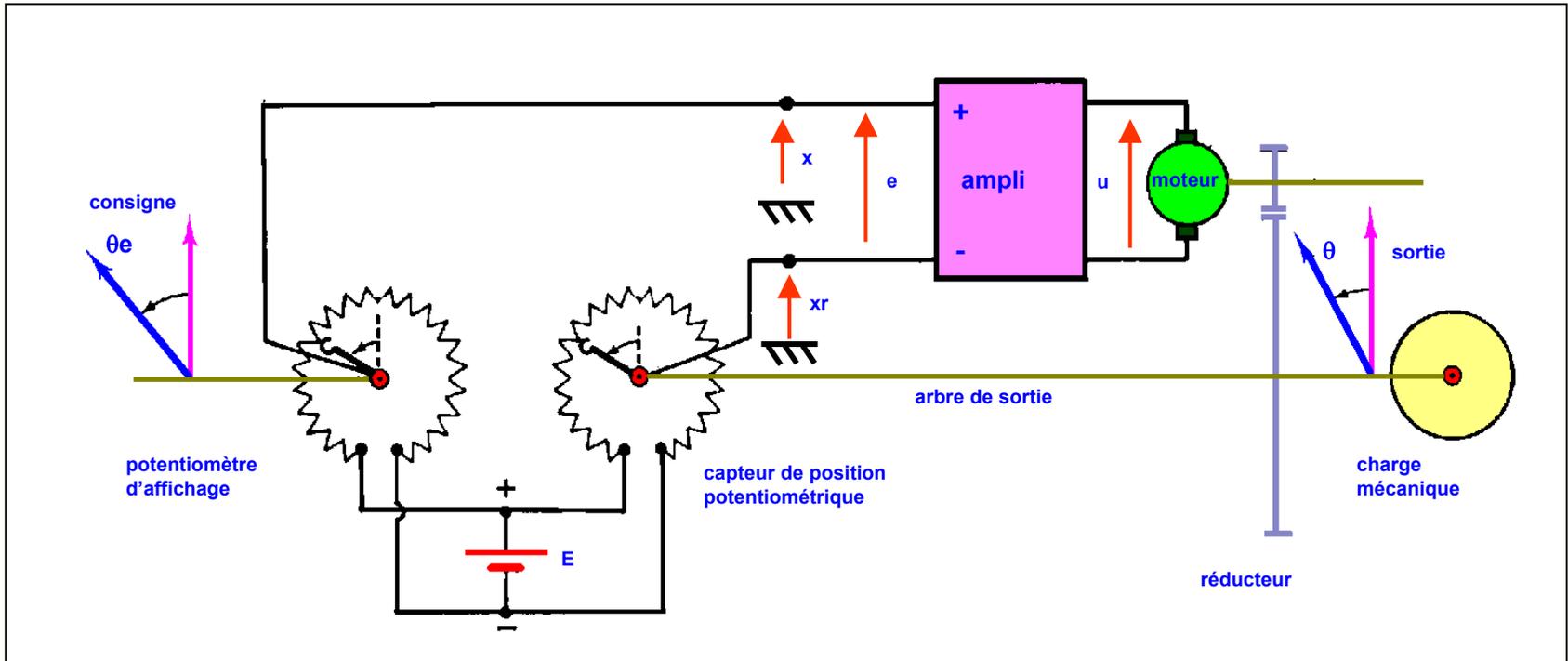




6- L'asservissement de position



Il permet de **positionner une charge** (gouvernail de bateau, antenne de radar, etc ...) dans la même position linéaire ou angulaire que celle définie par l'organe de commande (potentiomètre de consigne, CNA commandé par un ordinateur, etc ...).



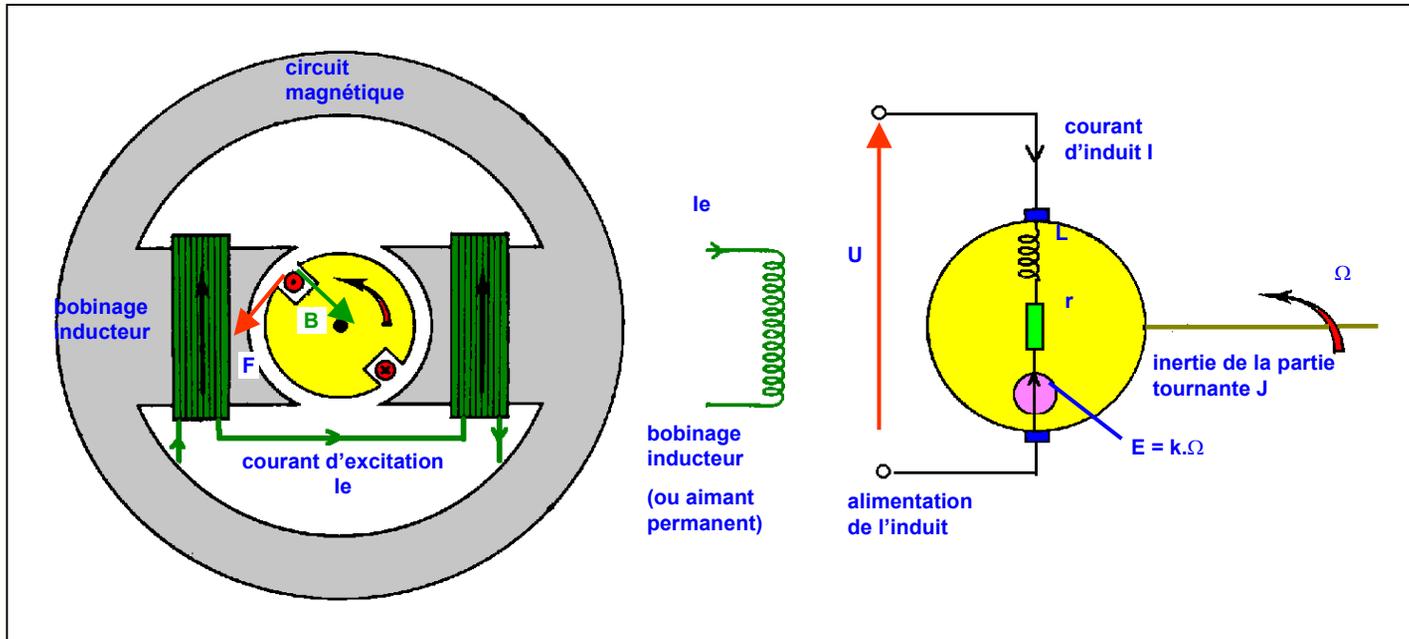
- la partie tournante (rotor+réducteur+charge) est caractérisée par son **inertie J**
- elle est entraînée par un moteur à courant continu caractérisé par sa **constante de vitesse K**
- la résistance de l'induit du moteur est r et son inductance L (souvent négligée)
- le moteur est à **flux constant** (champ magnétique créé par des aimants permanents le plus souvent)
- le capteur de position angulaire et l'organe d'affichage sont des potentiomètres

7- Modélisation du moteur à courant continu



Le moteur à courant continu comporte :

- un **circuit magnétique** canalisant le champ magnétique B créé par l'inducteur ou par un aimant permanent
- un **rotor** portant l'enroulement d'**induit** relié à l'extérieur par des contacts (charbons) frottant sur les lames du collecteur
- l'**induit** est alimenté par la tension U , est traversé par le courant d'induit I et tourne à une vitesse angulaire exprimée en rads/s
- il est caractérisé par sa résistance r , son inductance L et est le siège d'une fem induite E
- le rotor tourne car les conducteurs traversés par I et placés dans le champ magnétique B sont le siège de **forces de Laplace**



couple moteur $C_m = k \cdot I$

couples résistants

- constant $C_r = C_o$
- visqueux $C_r = f \cdot \Omega$

- la loi d'Ohm appliquée à l'induit s'écrit :

$$u(t) = e(t) + ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = K\Omega(t) + ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

- le principe fondamental de la dynamique appliqué à un corps en rotation s'écrit :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_m - C_r$$



8- Transmittance du moteur



- la loi d'Ohm appliquée à l'induit s'écrit :
$$u(t) = e(t) + ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = K\Omega(t) + ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

soit, en notation de Laplace :
$$U(p) = K\Omega(p) + rI(p) + LpI(p)$$
 équation électrique

- le principe fondamental de la dynamique appliqué à un corps en rotation s'écrit :
$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = Cm - Cr$$

soit, en notation de Laplace :
$$Jp\Omega(p) = KI(p) - Cr$$
 équation mécanique

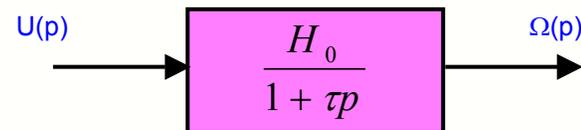
Dans le cas particulier très courant où on néglige d'inductance L de l'induit et les couples résistants :

l'équation électrique s'écrit :
$$U(p) = K\Omega(p) + rI(p)$$

et l'équation mécanique :
$$Jp\Omega(p) = KI(p)$$

On en déduit facilement la transmittance du moteur et son schéma fonctionnel:

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K_2 + Jpr} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{Jr}{K^2}p} = \frac{H_0}{1 + \tau p}$$



Remarques :

- si on tient compte d'un couple résistant constant ou proportionnel à la vitesse, on obtient aussi une transmittance du 1er ordre
- si on ne néglige plus l'inductance, le moteur devient un système du second ordre avec une constante de temps mécanique et une constante de temps électrique beaucoup plus faible que la précédente



9- Schéma fonctionnel de l'asservissement de position



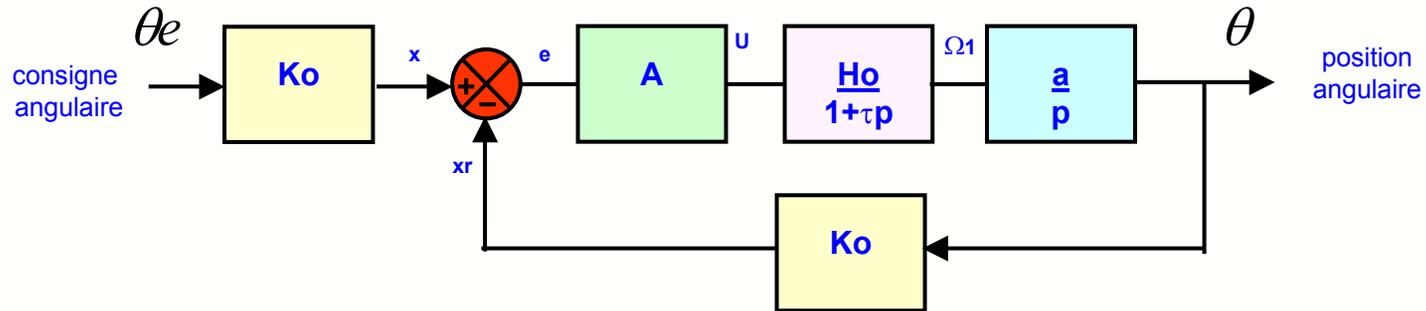
On admet que le moteur est un système du 1^{er} ordre, les autres constituants du système sont régis par des relations simples :

le potentiomètre d'entrée donne : $x = K_o \cdot \theta_e$

le réducteur réduit la vitesse : $\Omega_2 = a \cdot \Omega_1$

le potentiomètre de recopie donne : $x_r = K_o \cdot \theta$

on passe de la vitesse à l'angle en intégrant : $\theta = \frac{\Omega_2}{p}$



La transmittance en boucle ouverte s'écrit :

$$T(p) = \frac{X_r(p)}{E(p)} = \frac{A \cdot H_o \cdot K_o \cdot a}{p(1 + \tau p)} = \frac{T_o}{p(1 + \tau p)}$$

La transmittance en boucle fermée montre que le système est du 2^{ème} ordre :

$$T'(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_e(p)} = \frac{X_r(p)}{X(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{T_o} + \frac{\tau p^2}{T_o}}$$

avec

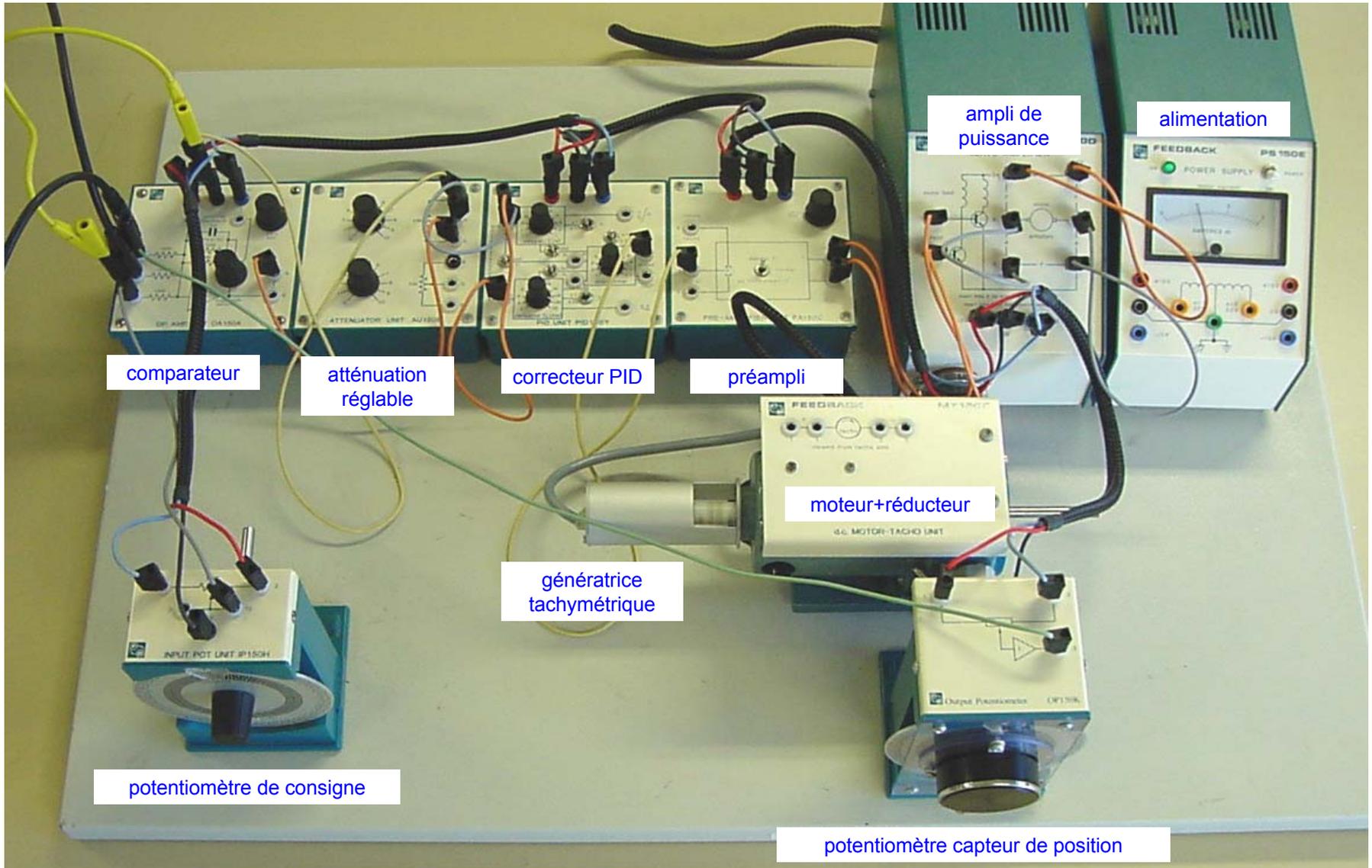
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T_o}{\tau}}$$

$$m = \frac{1}{2\sqrt{T_o \tau}}$$

- une fois que les différents éléments sont choisis, le seul paramètre facilement réglable est l'amplification A
- on réglera par conséquent A pour obtenir une valeur de m donnant un régime transitoire satisfaisant
- si par exemple on tolère, dans la réponse indicielle, un dépassement de 20 %, on réglera A pour avoir m=0,43



10- Exemple d'asservissement de position





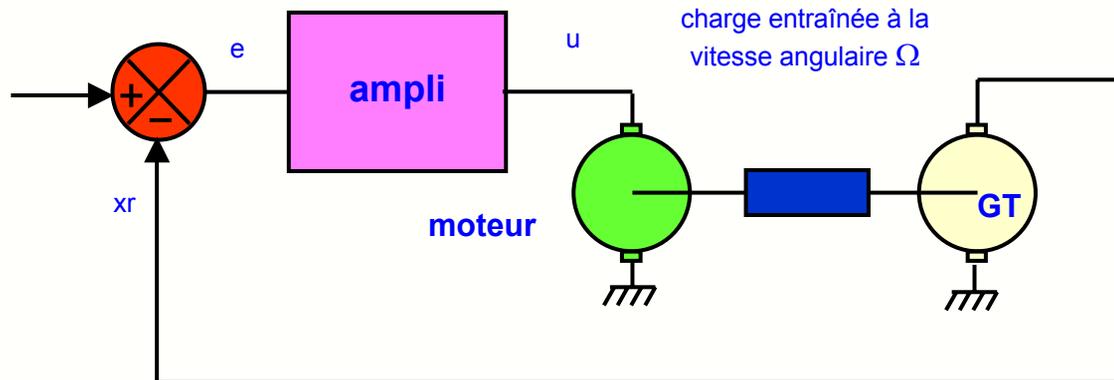
11- L'asservissement de vitesse



Le rôle d'une régulation de vitesse est de maintenir constante la vitesse d'un moteur, indépendamment :

- des variations de sa charge
- des fluctuations de la tension d'alimentation

tension x image de la consigne



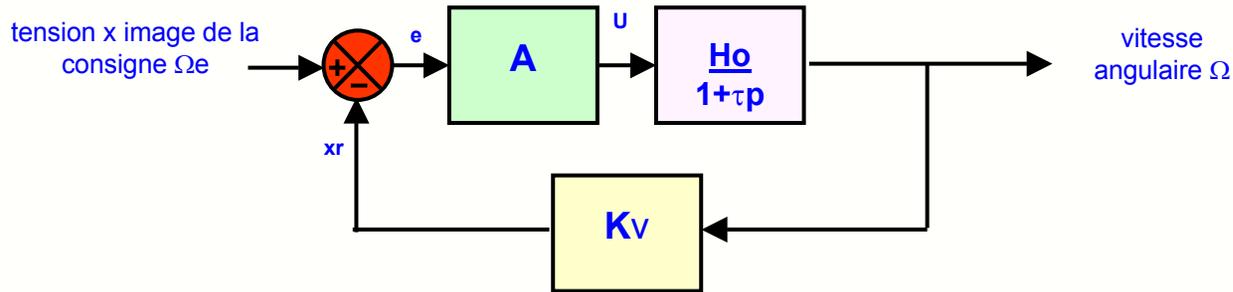
- la vitesse désirée Ω_e ou consigne est appliquée par x_r fourni par un potentiomètre ou par un CNA en sortie d'un ordinateur
- le bloc « organe d'affichage » n'existe pas dans ce type d'asservissement
- la vitesse est mesurée par une génératrice tachymétrique qui fournit une tension $x_r = K_v \cdot \Omega$
- l'inertie J de la partie tournante est la somme des inerties du moteur, de la charge et de la génératrice : $J = J_m + J_c + J_{gt}$



12- Schéma fonctionnel de l'asservissement de vitesse



Le schéma fonctionnel du système réduit est alors le suivant :



Si on adopte pour le moteur un modèle du 1er ordre, le gain en boucle ouverte de la régulation de vitesse s'écrit :

$$T(p) = \frac{A.Ho.Kv}{1+\tau p} = \frac{Xr(p)}{E(p)}$$

La transmittance en boucle fermée se calcule facilement :

$$T(p) = \frac{A \frac{Ho}{1+\tau p}}{1 + A \frac{HoKv}{1+\tau p}} = \frac{A.Ho}{1 + A.HoKv + \tau p} = \frac{\frac{A.Ho}{1 + A.HoKv}}{1 + \frac{\tau}{1 + A.HoKv} p} = \frac{To}{1 + \tau' p}$$

- le système asservi est du premier ordre et sa stabilité est donc assurée en principe
- en pratique, une valeur excessive du gain A peut faire apparaître des oscillations dans la réponse indicielle
- cela prouve qu'un modèle du 1er ordre pour le moteur ne traduit pas toujours la réalité

Voici quelques exemples de pôles négligés quelquefois à tort dans l'étude d'un asservissement :

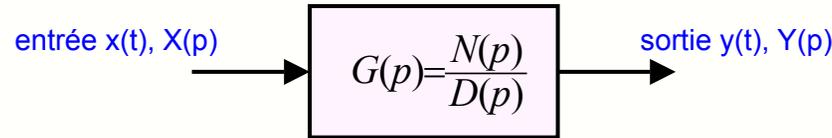
- la constante de temps électrique du moteur liée à l'inductance L de l'induit
- la ou les fréquences de coupure de l'amplificateur de puissance
- la fréquence de coupure du filtre nécessaire pour lisser la tension fournie par la génératrice tachymétrique
- les retards de propagation entre la sortie de la chaîne directe et le capteur (régulation de chauffage par exemple)



13- Stabilité d'un système linéaire

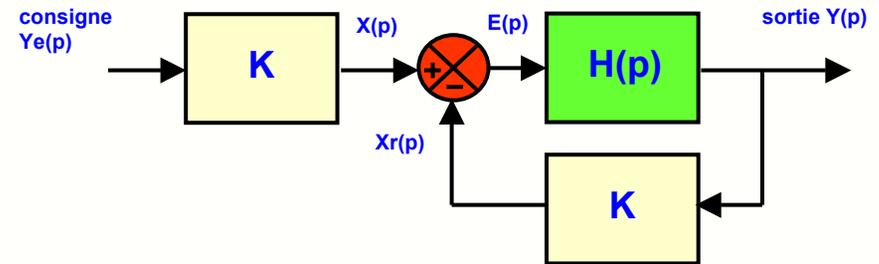


Soit un système linéaire possédant une entrée $x(t)$ et une sortie $y(t)$, et défini par sa transmittance de Laplace $G(p)$ composée d'un numérateur $N(p)$ et d'un dénominateur $D(p)$.



- les pôles de la transmittance $G(p)$ sont les racines du dénominateur et se trouvent donc en résolvant l'équation $D(p) = 0$
- on démontre qu'un système linéaire est stable si tous ses pôles ont une partie réelle négative

Ces résultats s'appliquent évidemment à la transmittance en boucle fermée $T'(p)$ d'un système asservi et on peut donc prévoir la stabilité d'un système bouclé en cherchant ses pôles.



- la transmittance $T'(p)$ de l'asservissement s'écrit :

$$T'(p) = \frac{Y(p)}{Y_e(p)} = \frac{H(p).K}{1+H(p).K} = \frac{T(p)}{1+T(p)}$$

- pour trouver les pôles de $T'(p)$, il faudra donc résoudre l'équation :

$$1 + H(p).K = 1 + T(p) = 0$$

soit

$$T(p) = -1$$

Remarque : ce calcul n'est simple que si $T(p)$ est un polynôme du premier ou du deuxième degré.

14- Condition d'oscillation d'un système bouclé



De la transmittance :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{Y}(j\omega)}{\underline{Y}_e(j\omega)} = \frac{\underline{H}(j\omega).K}{1 + \underline{H}(j\omega).K}$$

on déduit :

$$\underline{Y}(j\omega)[1 + \underline{H}(j\omega).K] = \underline{Y}_e(j\omega).\underline{H}(j\omega).K$$

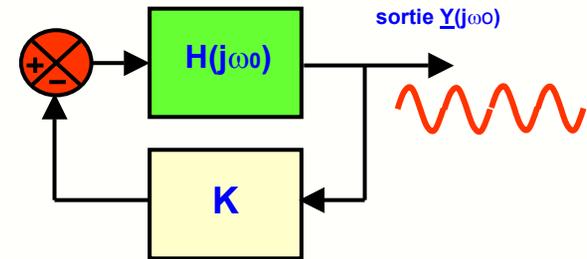
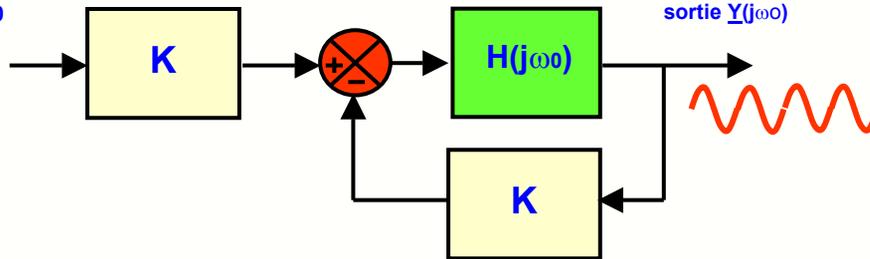
Un système asservi oscille s'il existe un signal en sortie (Y non nul) sans signal à l'entrée ($Y_e = 0$) :

$$\underbrace{\underline{Y}(j\omega)}_{\text{non nul}} [1 + \underline{H}(j\omega).K] = \underbrace{\underline{Y}_e(j\omega)}_{\text{nul}} . \underline{H}(j\omega).K$$

ce qui implique $[1 + \underline{H}(j\omega_0).K] = 0$ ou $\underline{T}(j\omega_0) = \underline{H}(j\omega_0).K = -1$

La fréquence f_0 pour laquelle cette condition est réalisée sera la fréquence d'oscillation.

consigne
 $\underline{Y}_e(j\omega)=0$



Remarques :

- la transmittance en boucle ouverte d'un SA est accessible facilement par un relevé de son diagramme de Bode, ou par l'enregistrement de sa réponse indicielle
- ces relevés en boucle ouverte se font **sans risque**, puisque le système ne peut devenir instable qu'en boucle fermée
- si les relevés montrent qu'il existe une fréquence f_0 où la condition d'oscillation est vérifiée, alors on ne boucle pas le système pour éviter toute casse mécanique résultant de l'entrée en oscillation du SA



15- Condition graphique d'oscillation

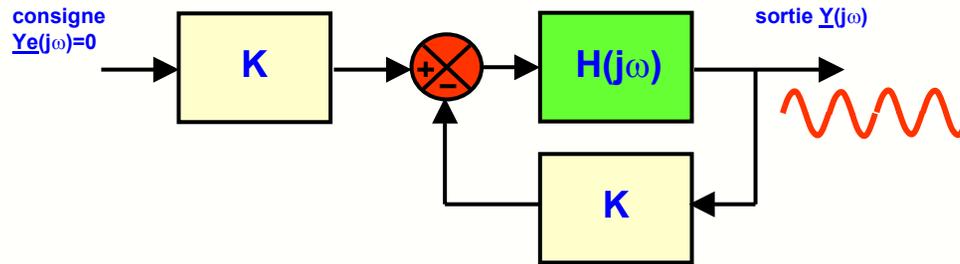


Un système asservi oscille s'il existe une fréquence f_0 telle que :

$$\underline{T}(j\omega_0) = \underline{H}(j\omega_0) \cdot K = -1$$

soit

- $|\underline{T}| = 1$
- $\arg(\underline{T}) = -\pi$



Graphiquement, cela veut dire qu'il existe sur le **diagramme de Bode** ou de **Nyquist** de la transmittance en boucle ouverte $\underline{T}(j\omega)$ une fréquence pour laquelle on aura $|\underline{T}| = 1$ et $\arg(\underline{T}) = -\pi$. Dans ce cas, la courbe passe par le **point critique** -1 .

Diagramme de Bode d'un système qui oscille en boucle fermée

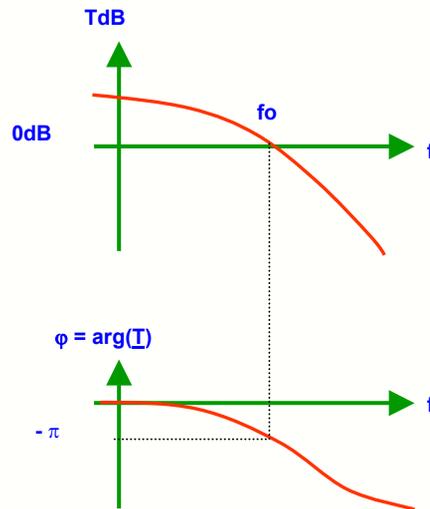
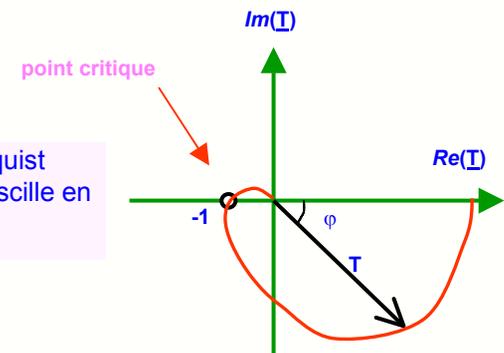


Diagramme de Nyquist d'un système qui oscille en boucle fermée



Remarque : c'est le **diagramme de Bode du gain $\underline{T}(j\omega)$ en boucle ouverte** qui permet de prévoir la **stabilité en boucle fermée**.



16- Critère graphique de stabilité de Nyquist

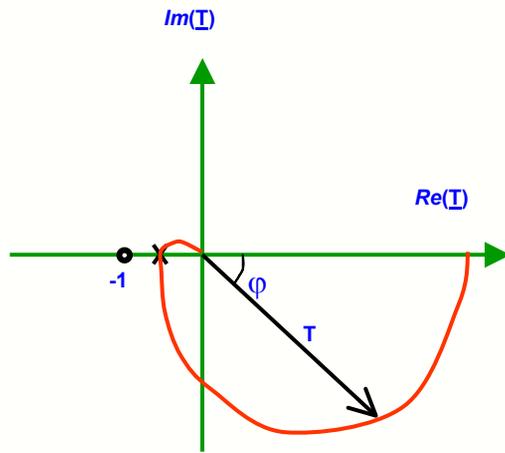


A la pulsation critique où $\arg(\mathbb{I}) = -\pi$, le lieu de Nyquist peut présenter 3 configurations :

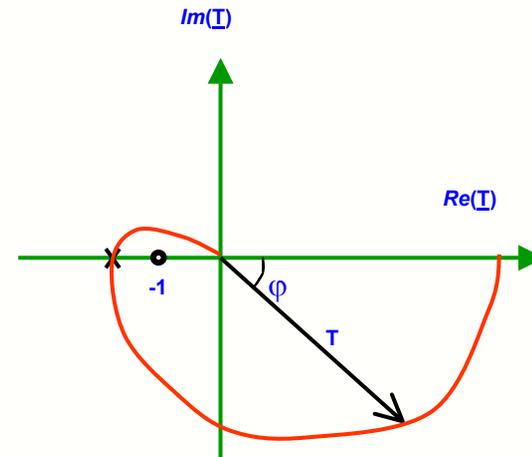
- il passe par le point critique -1 : le système oscillera si on le boucle, l'asservissement est instable et inutilisable
- le module T est inférieur à 1, le démarrage de l'oscillation n'est pas possible, le système est stable en boucle fermée
- le module T est supérieur à 1, l'oscillation démarre et croit, le système est instable en boucle fermée

Critère de stabilité de Nyquist ou du revers :

Un système asservi linéaire est stable en boucle fermée si, lorsqu'on décrit le lieu de Nyquist de $\mathbb{I}(j\omega)$ dans le sens des fréquences croissantes, on laisse le point -1 à gauche.



système stable en boucle fermée



système instable en boucle fermée

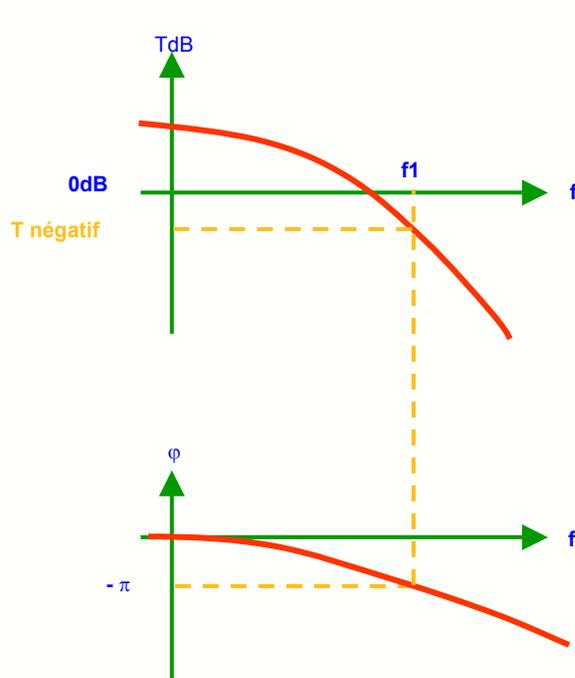
Remarque : une augmentation du gain de la chaîne directe se traduit par une homothétie de centre O sur le diagramme de Nyquist et conduit forcément à l'instabilité

17- La stabilité sur le diagramme de Bode

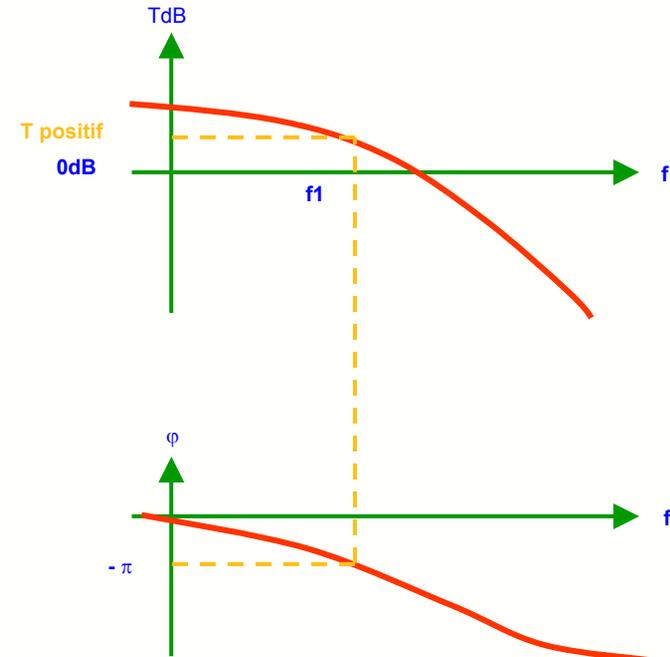


La stabilité se voit également très facilement sur le diagramme de Bode :

- si le module T_{dB} est **positif** à la fréquence f_1 où $\arg(\underline{I}) = -\pi$, le système sera **instable** en boucle fermée
- si le module T_{dB} est **négatif** à la fréquence f_1 où $\arg(\underline{I}) = -\pi$, le système sera **stable** en boucle fermée



système stable en boucle fermée



système instable en boucle fermée

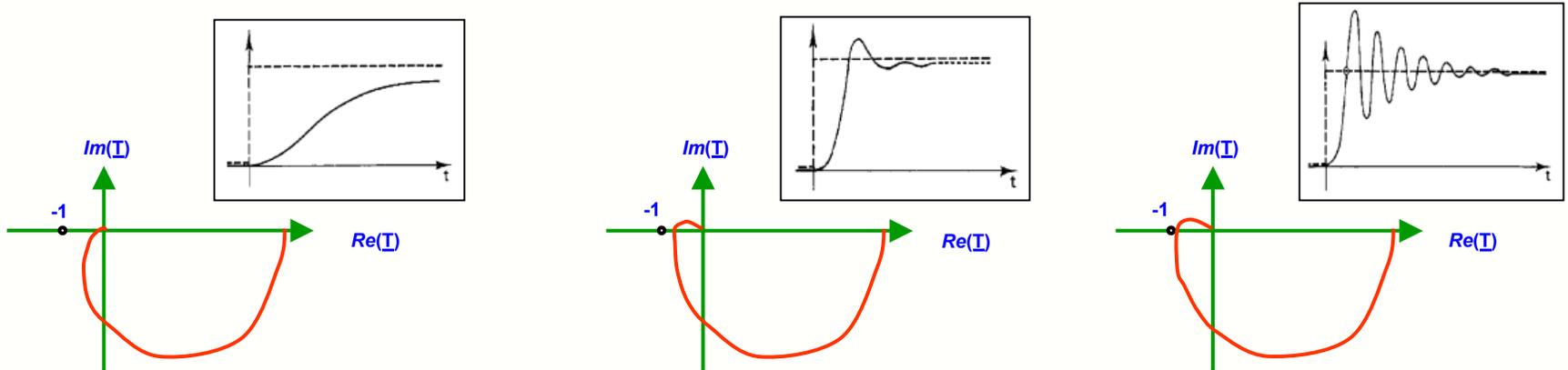
Remarque : une augmentation du gain de la chaîne directe se traduit par un décalage vers le haut de la courbe de gain et conduit forcément à l'instabilité



18- Marge de phase d'un système bouclé



La forme de la réponse indicielle du SA est liée à l'allure de la courbe au voisinage du point critique :

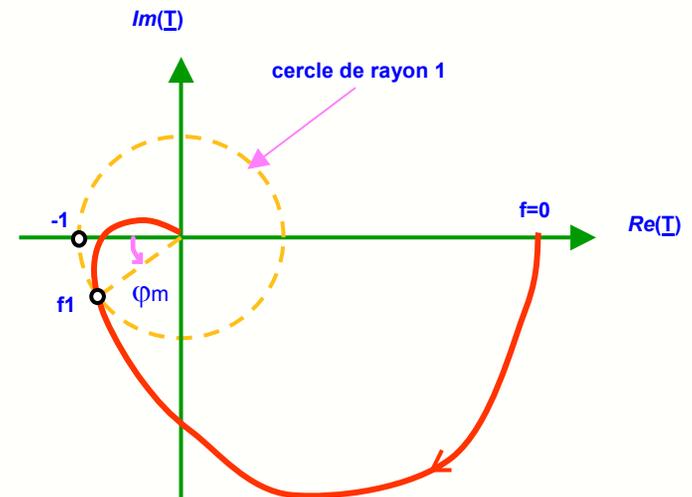


Plus le diagramme de Nyquist passe près du point -1 , moins le système sera amorti et plus il aura tendance à osciller.

On caractérise l'écart entre le lieu de Nyquist et le point -1 par la **marge de phase**

φ_m définie ainsi :

- le module de la transmittance est égal à 1 à la fréquence f_1
- à cette fréquence, l'argument de la transmittance vaut φ
- la marge de phase est : $\varphi_m = 180 + \varphi$
- un système **stable** a une **marge de phase positive**
- un système **instable** a une **marge de phase négative**



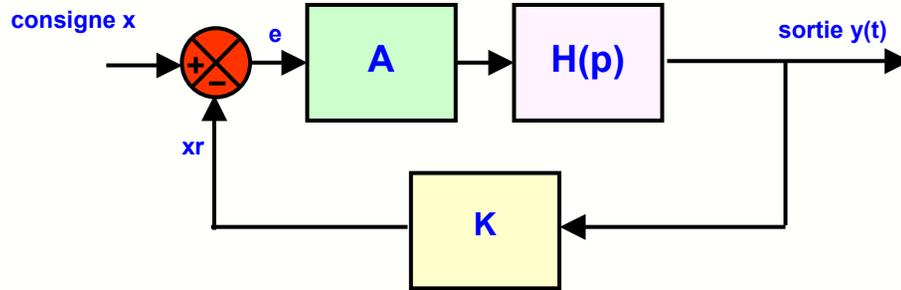
- un système du 2ème ordre qui a une marge de phase de 45° a un amortissement $m = 0,43$ et un dépassement $d = 20\%$
- un système d'ordre quelconque réglé à une marge de phase de 45° présentera aussi un dépassement de l'ordre de $d = 20\%$



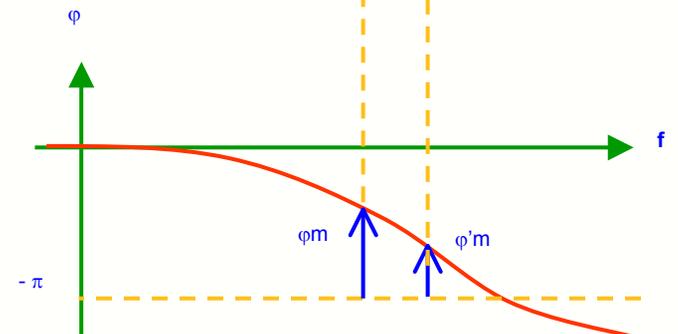
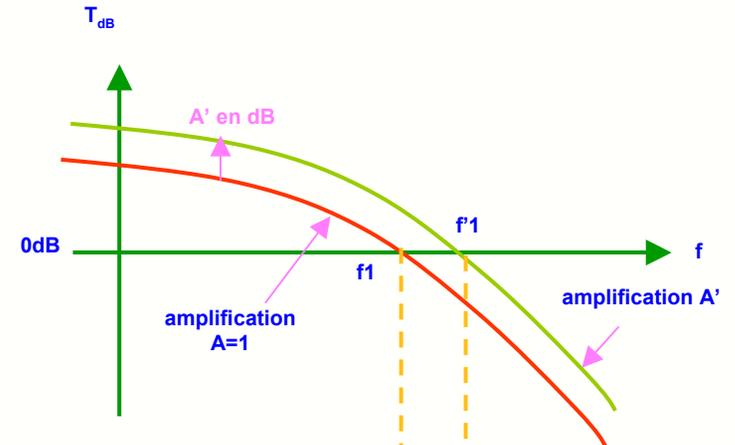
19- Réglage de la marge de phase sur Bode



Tous les asservissements comportent dans la chaîne directe un **amplificateur A réglable** agissant sur le signal d'erreur $e(t)$:



- la marge de phase φ_m se lit très facilement sur le diagramme de Bode du gain en boucle ouverte d'un système
- la marge de phase peut être **réglée** par **l'amplification A** dans la chaîne directe de l'asservissement
- une augmentation de l'amplification translate la courbe de gain vers le haut et ne modifie pas la courbe de phase
- une augmentation de l'amplification fait en général baisser la marge de phase
- une amplification qui donne une **marge de phase de 45°** est souvent un bon compromis, sauf pour les systèmes qui ne tolèrent pas de dépassement (on règle alors à $\varphi_m = 80$ à 90°)



Applet : réglage de la marge de phase d'un système

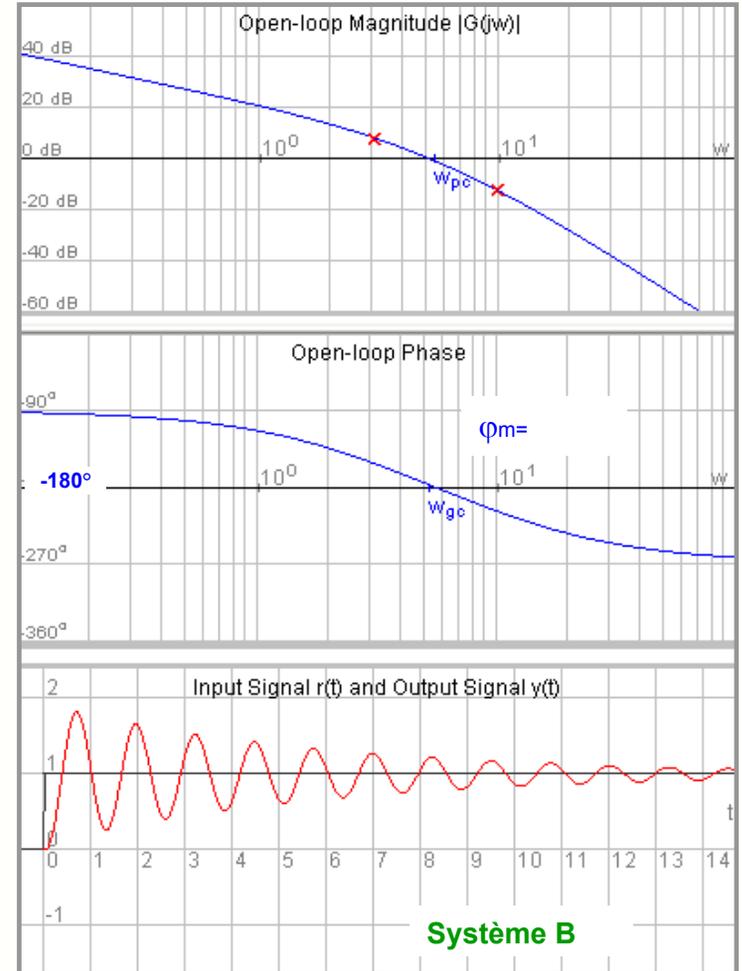
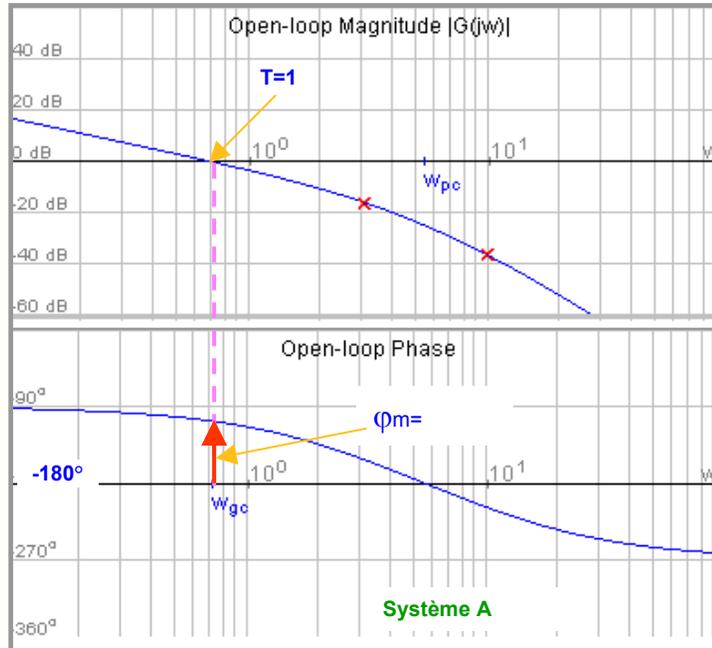


20- Exemples de mesure de la marge de phase (1)



Sur les diagrammes de Bode de la transmittance en boucle ouvert de deux systèmes asservis, mesurer la marge de phase :

- 1- repérer la fréquence f_1 où $T=1$
- 2- à cette fréquence, descendre sur la courbe de phase
- 3- mesurer l'écart entre la courbe de phase et -180°



Remarque : la marge de phase réduite explique les nombreuses oscillations dans la réponse indicielle du système B.

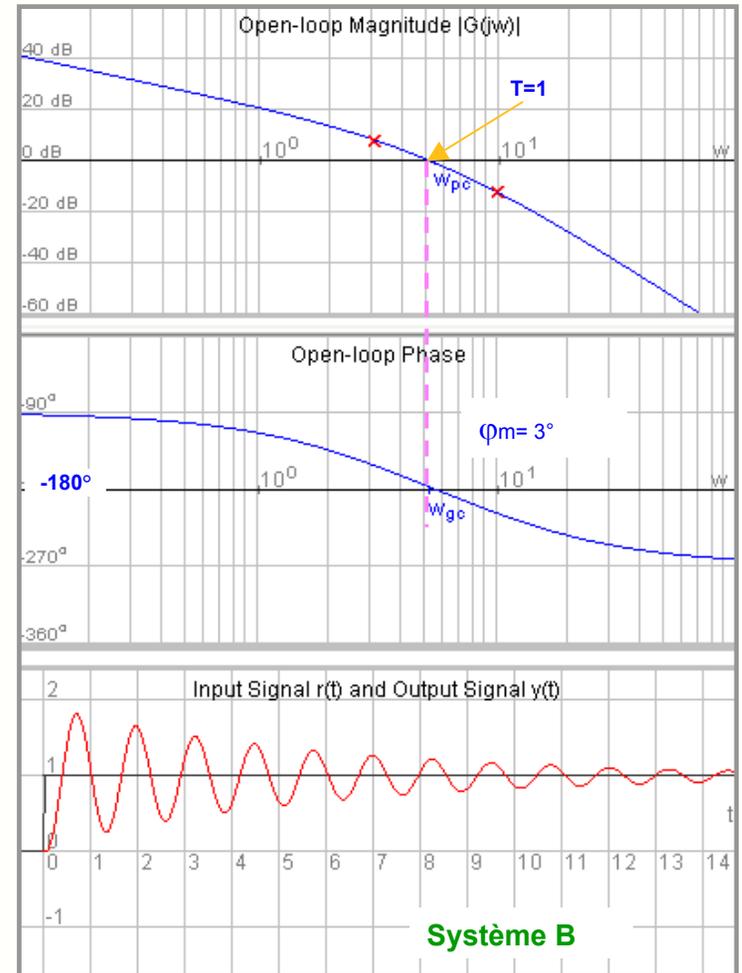
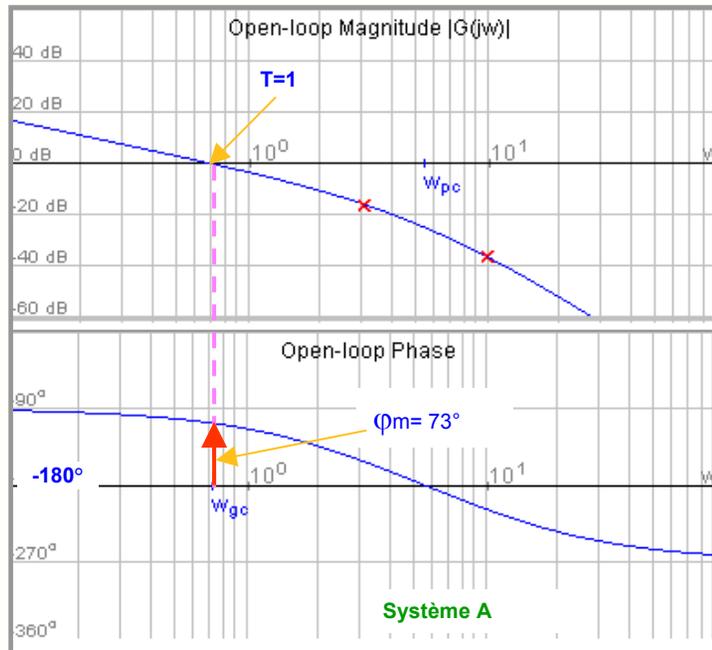


21 - Exemples de mesure de la marge de phase (2)



Sur les diagrammes de Bode de la transmittance en boucle ouvert de deux systèmes asservis, mesurer la marge de phase :

- 1- repérer la fréquence f_1 où $T=1$
- 2- à cette fréquence, descendre sur la courbe de phase
- 3- mesurer l'écart entre la courbe de phase et -180°



Remarque : la marge de phase réduite explique les nombreuses oscillations dans la réponse indicielle du système B.



22- Les erreurs dans un système asservi



La fonction d'un système asservi est de donner une grandeur de sortie $y(t)$ aussi voisine que possible de la consigne $y_e(t)$:

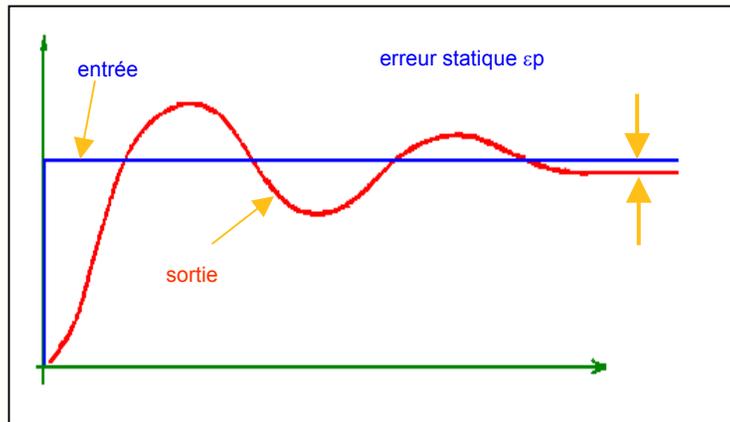
- l'organe d'affichage donne une tension $x(t)$ telle que : $x(t) = K.y_e(t)$
- le capteur fournit le signal $x_r(t)$ tel que : $x_r(t) = K.y(t)$
- le signal d'erreur $e(t)$ en sortie du comparateur vaut : $e(t) = x(t) - x_r(t)$
- on appelle alors **erreur** la grandeur ε définie par : $\varepsilon(t) = y_e(t) - y(t) = e(t)/K$

Réponse d'un SA réglé à une marge de phase de 45°

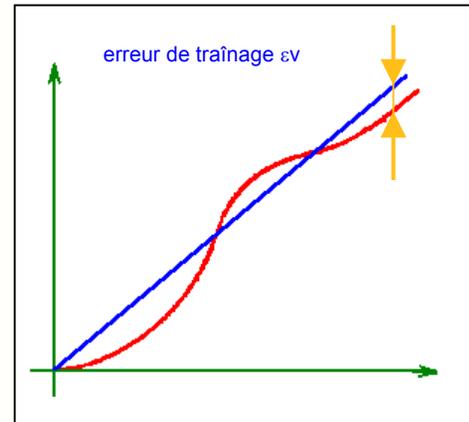


Remarque : parler de précision n'a de sens qu'en régime permanent

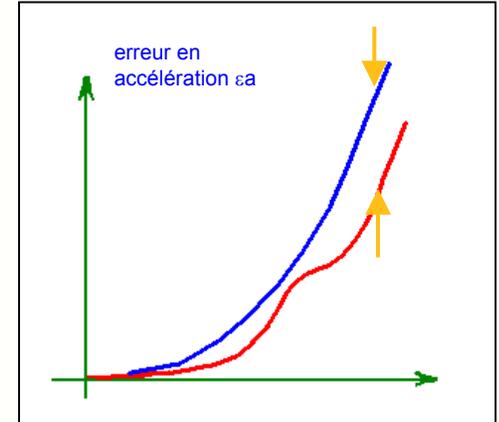
Pour évaluer la précision d'un SA, on étudie sa réponse à des signaux standards : l'échelon, la rampe et l'entrée parabolique.



entrée échelon



entrée rampe



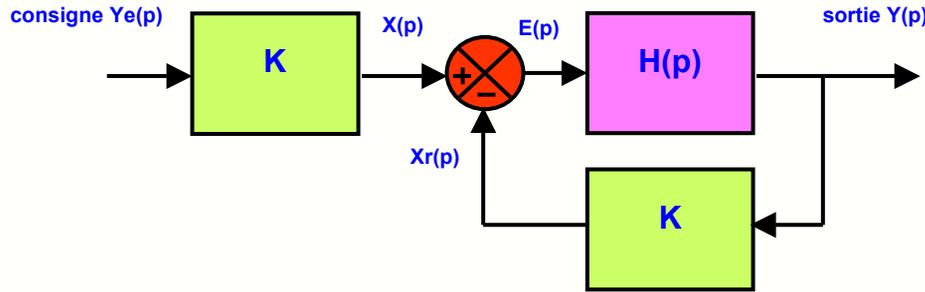
entrée parabolique



23- Calcul de l'erreur et classe du SA



L'erreur d'un système asservi en régime permanent se calcule facilement :



- $e(t) = x(t) - xr(t)$ signal d'erreur
- $\varepsilon(t) = ye(t) - y(t)$ erreur

- l'erreur en régime permanent est la différence entre la valeur désirée y_e et la valeur effective y :

$$\varepsilon(p) = Y_e(p) - Y(p) = Y_e(p) - Y_e(p) \frac{T(p)}{1+T(p)} = Y_e(p) \frac{1}{1+T(p)}$$

- elle dépend à la fois du type de consigne $y_e(t)$ et de sa transmittance en boucle ouverte $T(p)$
- l'erreur en régime permanent, c'est-à-dire au bout d'un temps très long, est calculée grâce au **théorème de la valeur finale** :

$$\text{erreur } \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Y_e(p) \frac{1}{1+T(p)}$$

- la transmittance $T(p)$ intervient donc par son **équivalent lorsque p tend vers 0**, soit : $\lim_{p \rightarrow 0} T(p) \approx \frac{To}{p^\alpha}$
- l'entier α s'appelle la **classe du système** qui est le **nombre d'intégrations dans le gain en boucle ouverte**.

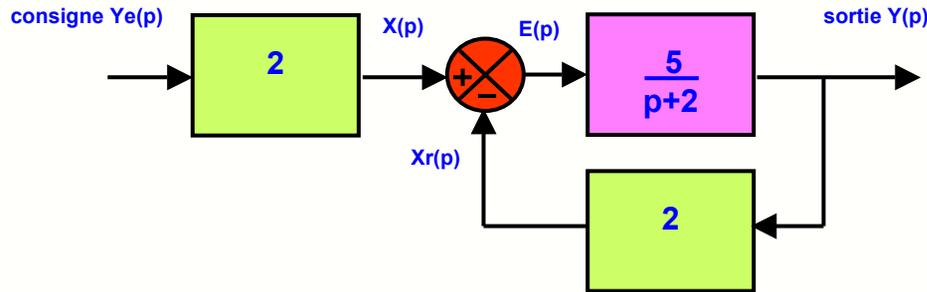
Exemple : une transmittance en bo qui s'écrit $T(p) = \frac{8}{p^2(p+4)}$ tend en BF vers $T(p) \approx \frac{8}{4p^2} = \frac{2}{p^2}$ système de classe 2



24- Exemple de calcul de l'erreur



On étudie le système asservi qui a la structure suivante :



- transmittance en bo s'écrit :

$$T(p) = \frac{10}{p + 2}$$

- lorsque p tend vers 0, elle vaut :

$$\lim_{p \rightarrow 0} T(p) \approx 5$$

- le SA est de classe 0

Les erreurs pour les entrées de forme simple sont :

l'échelon :	$ye(t)=U$	$Ye(p)=\frac{U}{p}$	$erreur \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{U}{p} \cdot \frac{1}{1+T(p)} = \frac{U}{6}$	constante
la rampe :	$ye(t)=at$	$Ye(p)=\frac{a}{p^2}$	$erreur \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p^2} \cdot \frac{1}{1+T(p)} = \infty$	infinie
la parabole :	$ye(t)=at^2$	$Ye(p)=\frac{2a}{p^3}$	$erreur \varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{2a}{p^3} \cdot \frac{1}{1+T(p)} = \infty$	infinie

Remarques :

- les systèmes usuels contiennent 0, 1, au maximum 2 intégration
- on rencontre donc dans la pratique des systèmes de classe 0, 1 ou 2
- chaque intégration introduit un déphasage de -90° et diminue donc d'autant la marge de phase
- un système de classe 2 (2 intégrations et une constante de temps) a une marge de phase négative
- ce système sera instable en boucle fermée s'il n'est pas équipé d'un correcteur



25- Influence de la classe sur l'erreur



Intéressons-nous au système le plus simple, le système de classe $\alpha = 0$, dont la transmittance ne contient aucune intégration, mais une ou plusieurs constantes de temps :

$$T(p) = \frac{T_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) \dots} \quad \text{dont l'équivalent est} \quad \lim_{p \rightarrow 0} T(p) = T_0$$

⇒ l'erreur statique pour une entrée en échelon $y_e(t) = U$ s'écrit :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{U}{1 + T(p)} = \frac{U}{1 + T_0}$$

⇒ l'erreur de traînage pour une entrée en rampe : $y_e(t) = at$ s'écrit :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p^2} \frac{1}{1 + T(p)} = \infty$$

Le tableau suivant donne les différentes erreurs pour les 3 entrées standards en fonction de la classe :

classe	0	1	2	3
échelon	$\frac{U}{1 + T_0}$	nulle	nulle	nulle
rampe	infinie	$\frac{a}{T_0}$	nulle	nulle
parabole	infinie	infinie	$\frac{2a}{T_0}$	nulle

Influence de la classe sur les erreurs

- pour une bonne précision, il faut donc avoir la classe la plus élevée possible. Malheureusement, l'augmentation de la classe dégrade la marge de phase et rend le système instable.
- un système de classe 0 est toujours corrigé par rajout d'un intégrateur après le comparateur pour améliorer la précision
- l'erreur qui n'est pas nulle peut toujours être diminuée en augmentant l'amplification de la chaîne directe, dans la limite permise par les considérations de stabilité

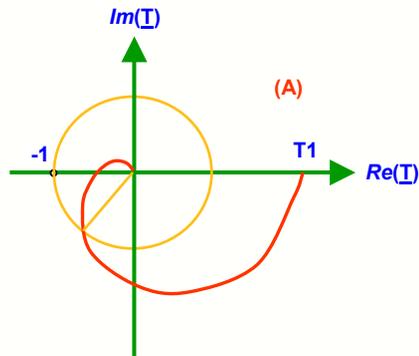


26 - Le principe des correcteurs



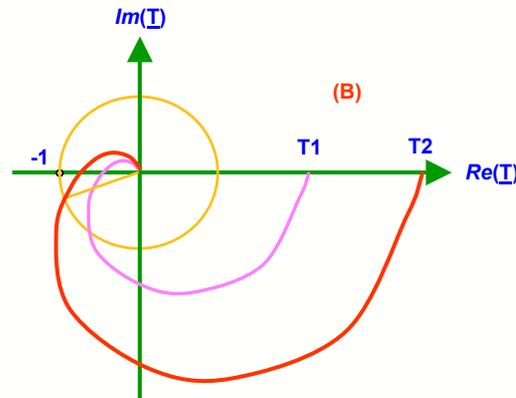
La correction d'un SA repose sur deux remarques fondamentales :

- la **stabilité** d'un SA dépend de sa marge de phase, et donc de la **forme du lieu de Nyquist au voisinage du point critique**
- la **précision** du SA dépend de sa classe et de l'amplification statique soit de la **forme du lieu de Nyquist aux basses fréquences**



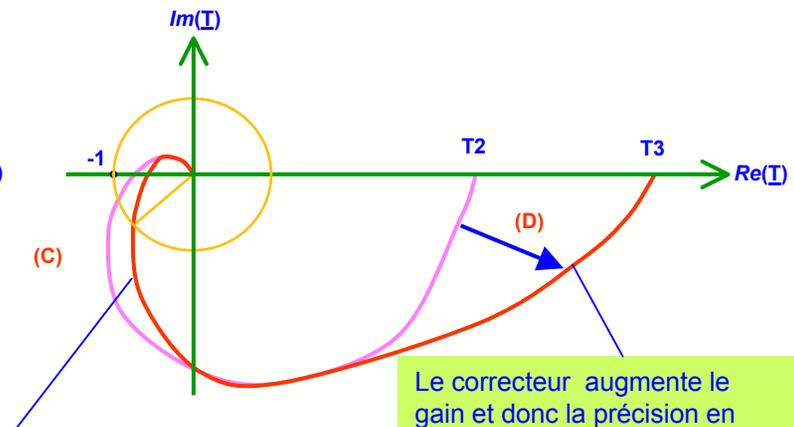
SA réglé :

- gain statique T1
- $\varphi_m = 45^\circ$



On augmente le gain :

- gain statique T2 > T1
- $\varphi_m = 15^\circ$ dégradée



Le correcteur rétablit la marge de phase $\varphi_m = 45^\circ$ avec le gain statique T2

Le correcteur augmente le gain et donc la précision en préservant $\varphi_m = 45^\circ$ avec un gain statique T3

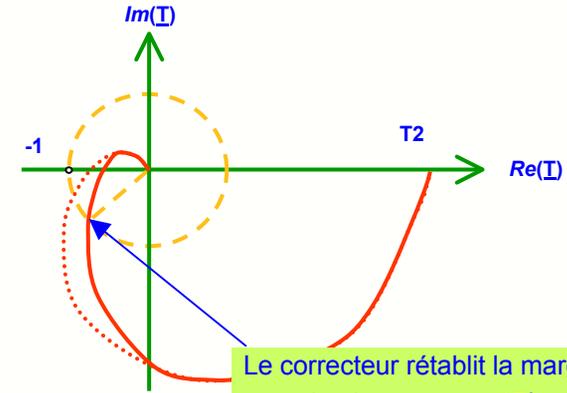
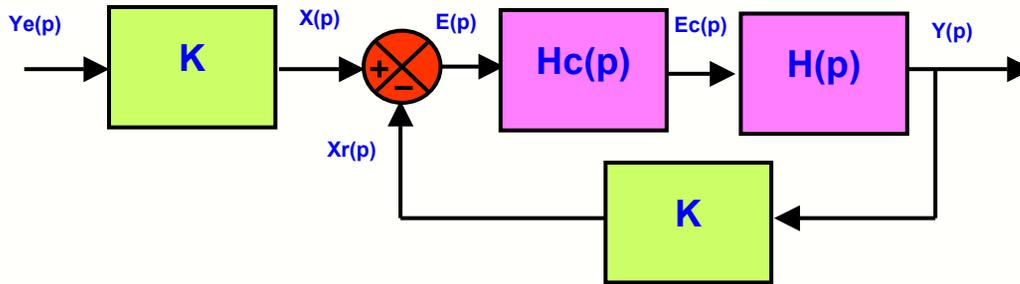
Dans la pratique, un réglage de gain donnant une stabilité correcte ne permet en général pas d'avoir une précision suffisante :

- on **règle le gain** pour avoir une bonne stabilité, la précision est alors souvent insuffisante (A)
- on **augmente alors le gain** pour avoir la bonne précision, la stabilité devient alors insuffisante (B)
- un **correcteur PD ou à avance de phase** (C) déforme localement le lieu de Nyquist pour passer assez loin du point critique et retrouver ainsi une marge de phase satisfaisante et une stabilité correcte
- si nécessaire, on rajoute un second **correcteur** (D) augmentant le gain aux basses fréquences pour améliorer encore la précision

27 - Le correcteur PD proportionnel-dérivé



On utilise ce type de correcteur $H_c(p)$ pour rattraper une marge de phase insuffisante :



Le correcteur rétablit la marge de phase $\varphi_m = 45^\circ$ à la fréquence critique f_1

Cette augmentation de la marge de phase peut être assurée par un quadripôle ayant la transmittance suivante :

- sa transmittance de Laplace s'écrit :

$$H_c(p) = 1 + \tau p \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{2\pi f_a}$$

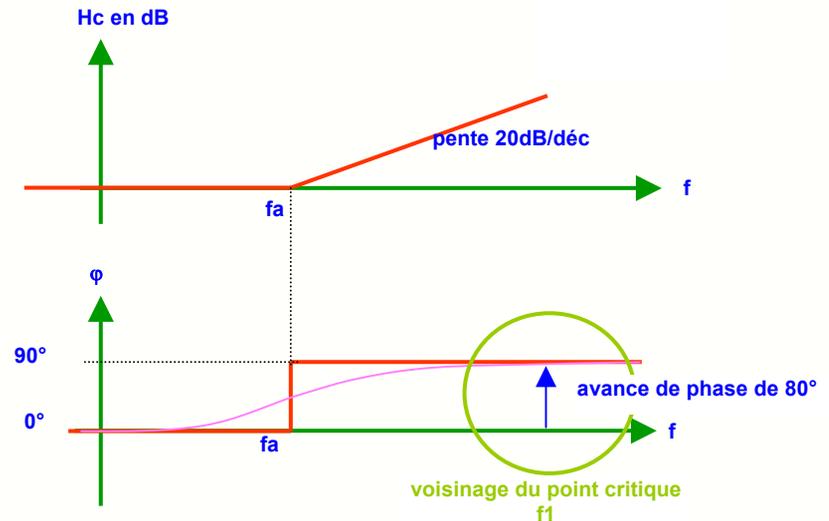
- le signal d'erreur corrigé a pour expression :

$$E_c(p) = H_c(p) \cdot E(p) = E(p) + \tau p E(p)$$

soit
$$e_c(t) = e(t) + \tau \frac{de(t)}{dt}$$

On comprend que ce correcteur s'appelle **correcteur proportionnel-dérivé** ou PD.

- on choisit par exemple $f_a = f_1/10$



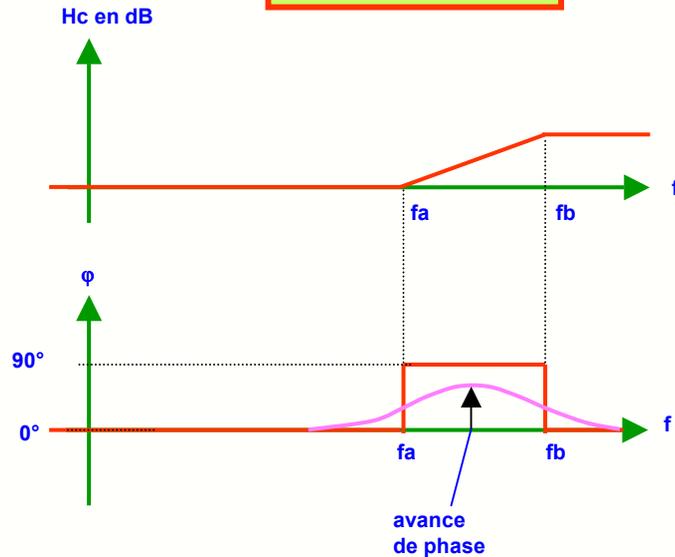


28 - Le correcteur à avance de phase



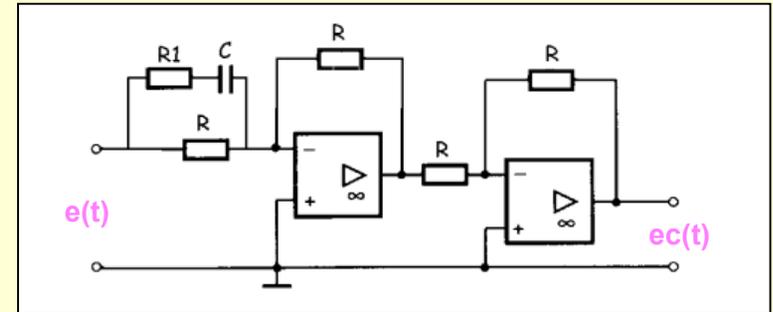
- un correcteur PD présente un gain élevé aux fréquences hautes, ce qui est gênant et rend le système sensible aux parasites.
- en pratique, on limite donc le gain aux fréquences hautes, ce qui nous donne le correcteur à avance de phase usuel

$$H_c(jf) = \frac{1 + j \frac{f}{f_a}}{1 + j \frac{f}{f_b}}$$



Réalisation d'un correcteur à avance de phase

$$H_c(p) = \frac{1 + (R + R_1)Cp}{1 + R_1 Cp}$$



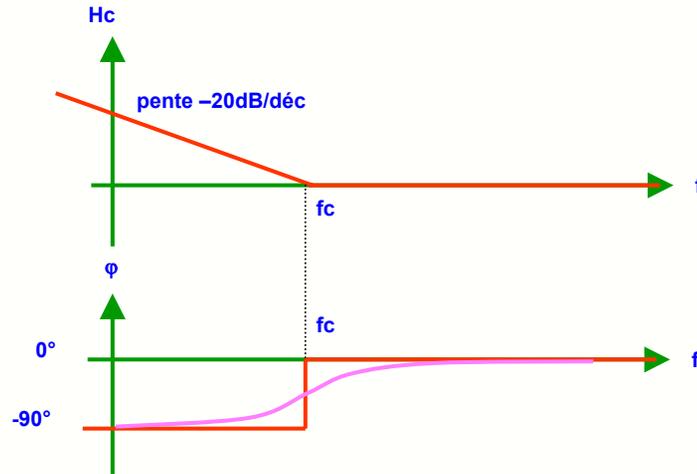
- il faut choisir f_a et f_b pour que l'avance de phase maximale tombe à la fréquence où le module de la fonction de transfert corrigée est égal à 1 . C'est le point difficile de la synthèse du quadripôle de correction.
- on peut, pour un correcteur bien calculé, remonter la marge de phase d'une cinquantaine de degrés, ce qui permet de passer d'un système à la limite de l'instabilité à un système corrigé ayant un degré de stabilité correct !



29 - Le correcteur proportionnel-intégral



Le rôle de ce correcteur est d'augmenter la précision de l'asservissement en augmentant la classe du système sans dégrader sa marge de phase.



$$Hc(jf) = \frac{1 + j\frac{f}{f_c}}{j\frac{f}{f_c}}$$

Son diagramme de Bode fait apparaître :

- une intégration aux basses fréquences , ce qui augmente la classe du système
- un déphasage nul aux fréquences plus élevées où sera définie la marge de phase

▪ sa transmittance de Laplace s'écrit : $Hc(p) = \frac{1 + \tau p}{\tau p} = 1 + \frac{1}{\tau p}$ avec $\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$

▪ le signal d'erreur corrigé a pour expression : $Ec(p) = Hc(p).E(p) = E(p) + \frac{E(p)}{\tau p}$ soit $e_c(t) = e(t) + \frac{1}{\tau} \int e(t) dt$

C'est la raison pour laquelle ce correcteur s'appelle correcteur proportionnel-intégral ou PI.



30 - Le correcteur à retard de phase

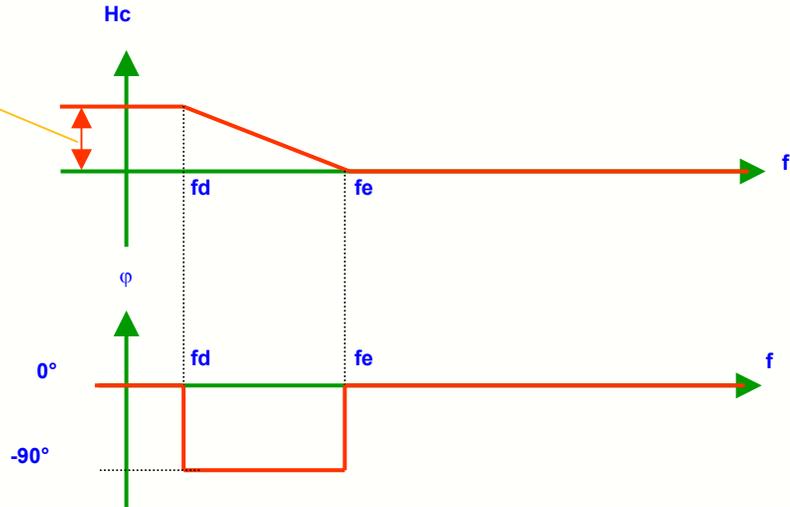


Si on veut simplement diminuer l'erreur sans changer de classe, il suffit de limiter l'augmentation de gain aux très basses fréquences, ce qui donne le **correcteur à retard de phase** usuel :

$$H_c(jf) = \frac{f_e}{f_d} \cdot \frac{1 + j \frac{f}{f_e}}{1 + j \frac{f}{f_d}}$$

augmentation du gain en BF

$$K = \frac{f_e}{f_d}$$



Réalisation d'un correcteur à retard de phase

- sans R_2 , on a un correcteur proportionnel-intégral

$$H_c(p) = \frac{1 + R_1 C p}{R C p}$$

- avec R_2 , on a un correcteur à retard de phase

$$H_c(p) = \frac{R_2}{R} \cdot \frac{1 + R_1 C p}{1 + (R_1 + R_2) C p}$$



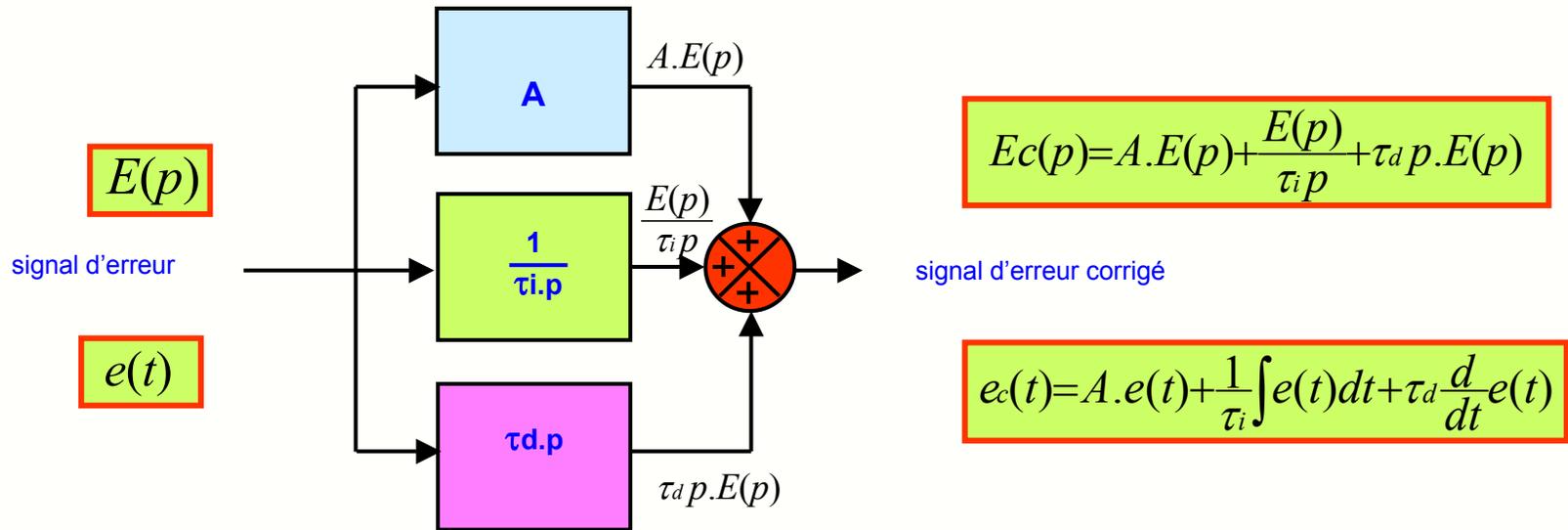
31 - Le correcteur PID universel



Les 2 correcteurs précédents ont des propriétés complémentaires :

- proportionnel-intégral ou à retard de phase : améliore la précision en augmentant le gain aux basses fréquences
- proportionnel-dérivé ou à retard de phase : améliore la stabilité en augmentant une marge de phase trop juste

On associe volontiers dans un asservissement les 2 types de correcteurs, ce qui donne le **correcteur PID** :



- à partir d'un enregistrement de la réponse à un échelon du système asservi non corrigé, l'**automaticien** détermine le réglage du correcteur PID qui optimisera la réponse du système
- plusieurs **outils mathématiques, graphiques ou informatiques** existent pour assister le technicien dans ces réglages
- les améliorations obtenues sont tellement évidentes qu'il n'est pas concevable aujourd'hui de faire fonctionner un système asservi qui ne soit pas équipé de son correcteur

paramètres de réglage A, τ_d, τ_i

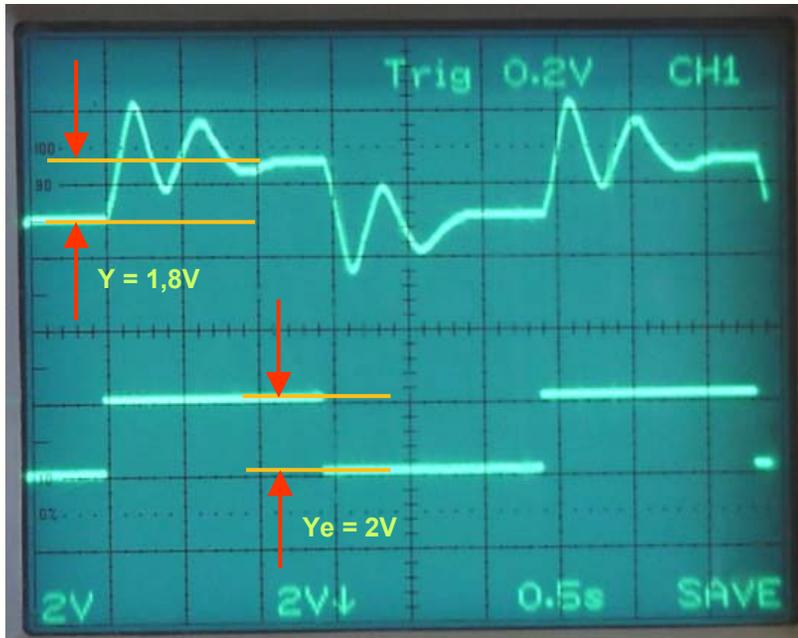


32 - Efficacité de la correction par PID

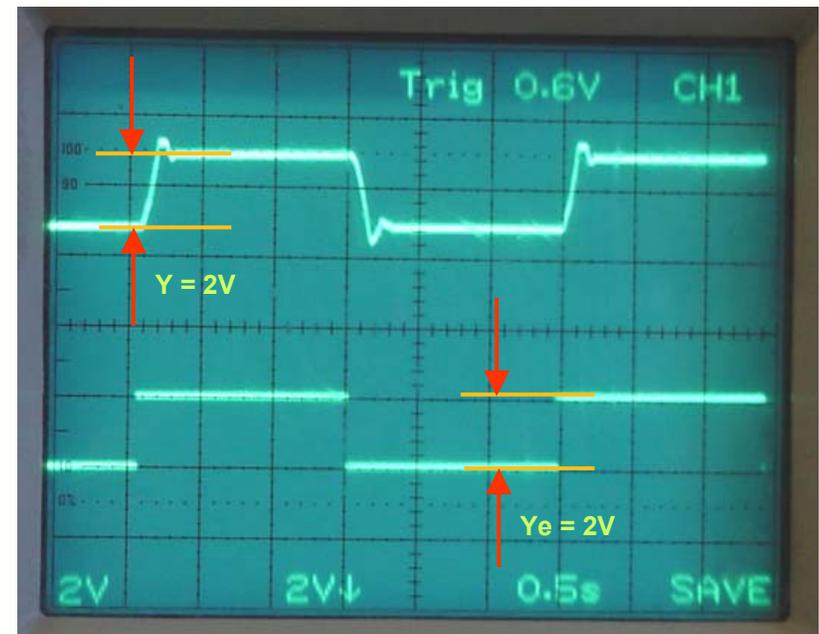


Les performances d'un asservissement de position angulaire ont été améliorées par l'utilisation d'un correcteur PID :

- le régime transitoire est bien meilleur, avec un **dépassement** qui passe de 100% à 20%
- la précision a été améliorée et **l'erreur de position annulée**



Système non corrigé



Système corrigé

[Vidéo](#) : réponse d'un système non corrigé

[Vidéo](#) : réponse d'un système corrigé



33 - Méthode de réglage du PID



Les enregistrements ci-contre permettent de se faire une idée de l'influence des différents réglages sur le comportement en régime transitoire du système bouclé.

Parmi les méthodes de réglage des régulateurs PID de processus industriels, une des plus utilisées est celle proposée par J.G. Ziegler et N.B. Nichols.

Les mesures à effectuer sur le système à régler, pour un régulateur PID parallèle, sont les suivantes :

- appliquer à l'entrée du système un échelon (signal carré)
- augmenter le gain jusqu'à la valeur A_{max} qui rend le système juste instable
- relever la période d'oscillation T_o du système instable

⇒ le gain optimal A_o vaut alors

$$A_o = \frac{A_{max}}{1,7}$$

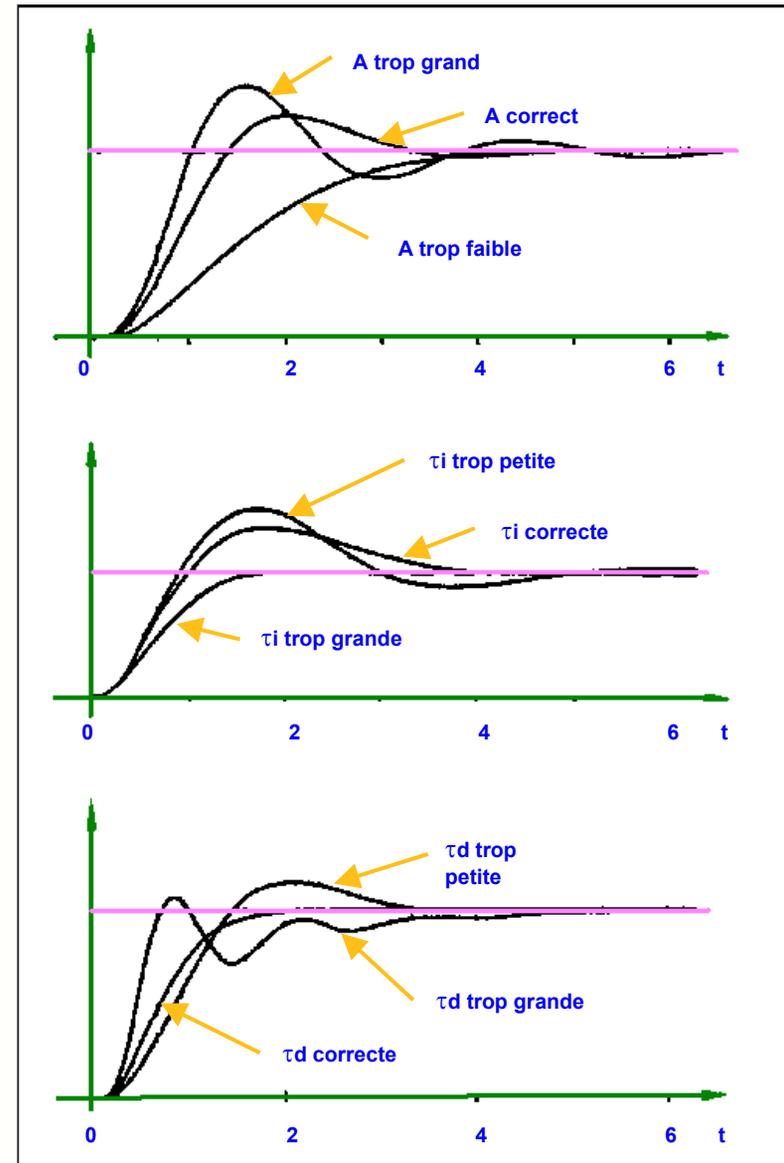
⇒ la constante de temps de l'intégrateur vaut

$$\tau_i = \frac{0,85 \cdot T_o}{A_{max}}$$

⇒ la constante de temps du dérivateur vaut

$$\tau_d = \frac{T_o \cdot A_{max}}{13}$$

Applet : réglage d'un correcteur PID





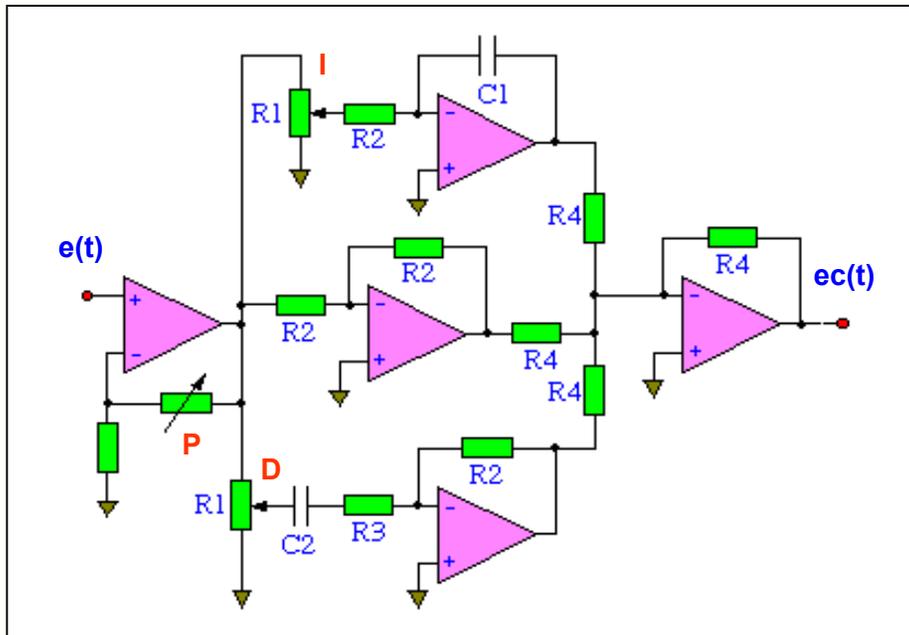
34 - Exemples de réalisation de PID



Le correcteur PID peut être réalisé selon deux technologies :

- en **analogique** à l'aide d'amplificateurs opérationnels
- en **numérique** par une structure : CAN + filtre numérique + CNA

Exemple de correcteur PID analogique



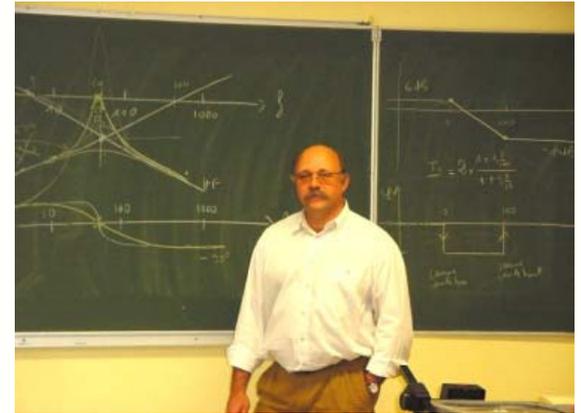
Exemple de correcteur PID industriel numérique

Remarques :

- le correcteur PID travaillant à des fréquences très basses de l'ordre du Hertz, ses constantes de temps doivent être importantes
- la réalisation en analogique fait appel à des condensateurs non polarisés de fortes valeurs, encombrants et peu fiables
- en numérique la réalisation de constantes de temps élevées définies par logiciel ne pose pas de problème
- la réalisation numérique du PID permet aussi son interfaçage et son réglage à partir d'un PC



Zillisheim - sous-bois en automne



FIN