# Réponse d'un système linéaire

Haut-parleur graves

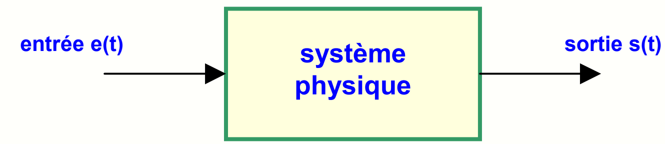

Laplace 1749-1827

# Sommaire



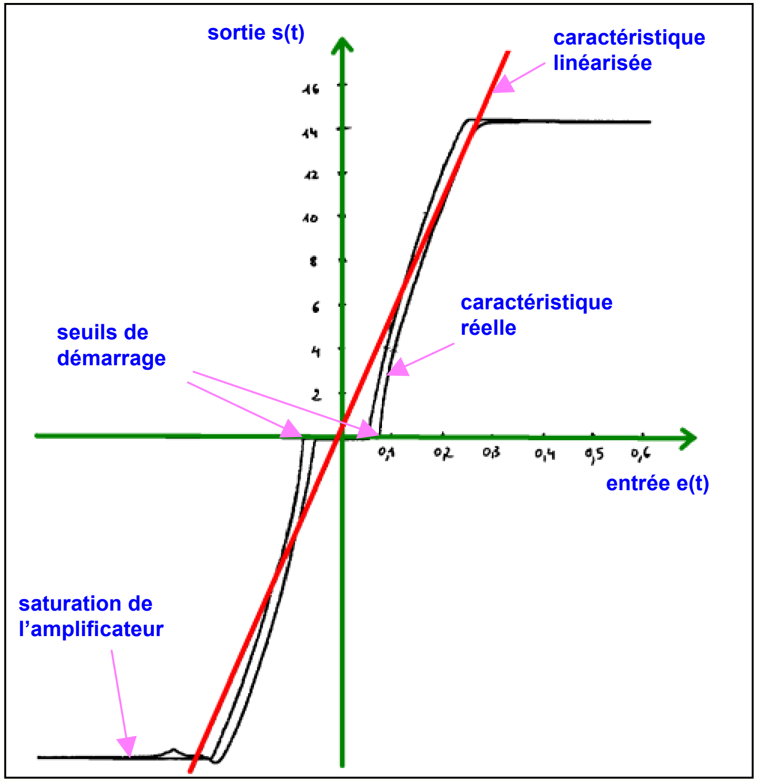
# 1- Les systèmes linéaires

Un système physique électronique ou électromécanique est linéaire si e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire.




- il ne présente aucune non-linéarité comme la saturation des amplificateurs
- les moteurs n'ont pas de seuil de démarrage, et le système ne contient ni trigger, ni relais
- l'étude mathématique d'un dispositif linéaire est plus simple que celle d'un système réel
- on commence donc toujours, si c'est possible, par négliger les non-linéarités
- la régulation de chauffage « tout ou rien » est un exemple de système non-linéaire impossible à linéariser

Exemple : groupe ampli+moteur+génératrice tachymétrique


Linéariser ce système revient à négliger :

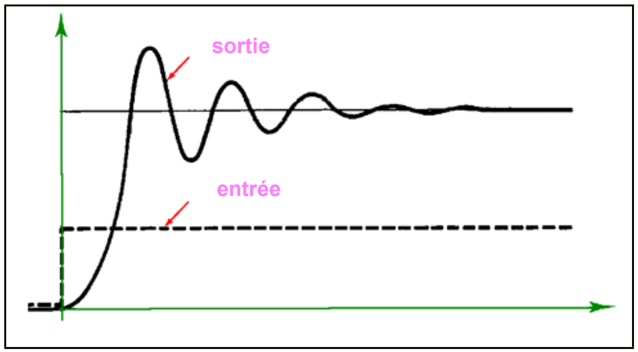
- la saturation si e(t) dépasse 0,2V
- les frottements qui empêchent le moteur de tourner si e(t) < 0,7V
- l'hystérésis qui dédouble la caractéristique

Applet : simulation de quelques systèmes linéaires

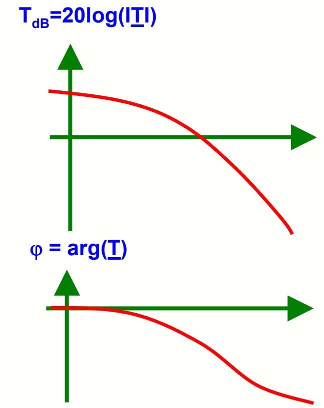
# 2- Caractérisation d'un système

Il y a plusieurs façon des caractériser un système physique linéaire dans le but de prévoir sa réponse à une entrée donnée :

- par sa réponse à un signal de forme simple (impulsion, échelon, rampe …)



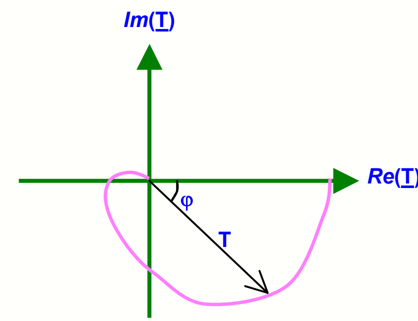

- par son diagramme de Bode qui donne le module et l'argument de la transmittance




- par l'équation différentielle linéaire reliant e(t) et s(t) qui permet de trouver la réponse s(t) pour une entrée e(t) quelconque

$$s(t) = 2.e(t) + 10e'(t) + 3s'(t) + 12s''(t)$$

- par son diagramme de Nyquist qui décrit la transmittance complexe




- par sa transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$ qui relie l'entrée et la sortie en régime sinusoïdal

$$\underline{T}(j\omega)=\frac{2+10j\omega}{1-3j\omega+12\omega^2}$$

- par sa transmittance de Laplace T(p) qui lie les transformées de Laplace de l'entrée E(p) et de la sortie S(p)

$$T(p)=\frac{2+10p}{1-3p-12p^2}$$

# 3- Pôles et zéros d'une transmittance

Le numérateur et le dénominateur de la transmittance de Laplace peuvent se factoriser et T(p) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$T(p) = K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_m)}$$

degré n

degré m = ordre du système

- les n racines zi du numérateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des zéros
- les m racines pj du dénominateur sont réelles ou complexes conjuguées et s'appellent des pôles

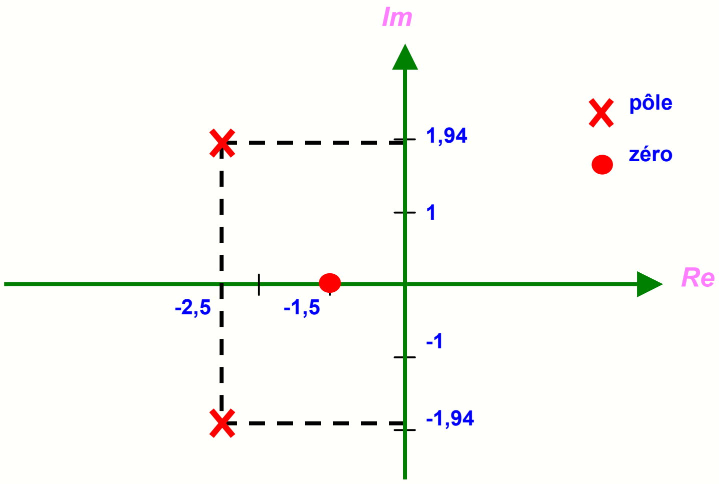
La transmittance du système est entièrement déterminée par la constante K , les zéros zi et les pôles pj.

**Exemple :** système du second ordre

$$T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10} = \frac{2(p+1,5)}{(p+2,5-j1,94)(p+2,5+j1,94)}$$

Cette transmittance est caractérisée par :

- une constante K = 2
- un zéro z1 = -1,5
- deux pôles p1 = -2,5 – j1,94 et p2 = -2,5 + j1,94

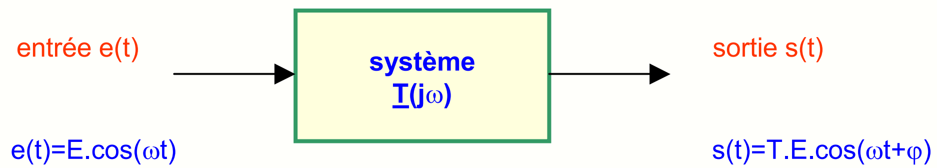



La représentation des pôles et des zéros dans le plan complexe s'appelle diagramme des pôles et des zéros.

Applet : **calcul des pôles et des zéros d'une transmittance**

# 4- Calcul de la réponse à une entrée donnée

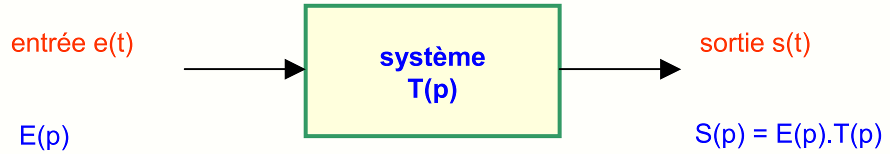
⇒ si l'entrée est sinusoïdale, la transmittance complexe permet de calculer facilement la réponse :




- $S=|\underline{T}(j\omega)|.E$
- $\varphi=\arg\underline{T}(j\omega)$

- la sortie est aussi sinusoïdale, et de même fréquence que l'entrée
- l'amplitude de la sortie dépend de l'amplitude de l'entrée et du module T de la transmittance à la fréquence de travail
- le déphasage $\varphi$ entre l'entrée et la sortie est égal à l'argument de la transmittance à la fréquence de travail

⇒ si l'entrée est de forme quelconque, la transmittance de Laplace permet de calculer la réponse :




- on commence par calculer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t)
- on écrit S(p) = E(p).T(p) ( évident …)
- en appliquant la transformée de Laplace inverse, on calcule s(t) à partir de S(p)

# 5- Les propriétés de la transformation de Laplace

Le tableau ci-dessous rappelle les transformées de Laplace de quelques signaux simples et utiles, ainsi que les propriétés les plus importantes de cette transformée :

| propriété | fonction du temps | fonction de p |
|---|---|---|
| linéarité | $a.f_1(t)+b.f_2(t)$ | $a.F_1(p)+b.F_2(p)$ |
| dérivation | $\frac{df(t)}{dt}$ | $pF(p)$ |
| intégration | $\int_0^t f(t)dt$ | $\frac{F(p)}{p}$ |
| translation dans le temps | $f(t-a)$ | $e^{-ap}F(p)$ |
| translation en p | $f(t)e^{-at}$ | $F(p+a)$ |
| **signal** | | |
| échelon | $f(t)=U(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| impulsion de Dirac | $f(t)=\delta(t)$ | $1$ |
| rampe | $f(t)=at$ | $\frac{a}{p^2}$ |
| exponentielle | $f(t)=e^{-at}$ | $\frac{1}{p+a}$ |

- pour simplifier les calculs, on supposera que signaux d'entrée sont nuls avant l'instant t =0
- le système est toujours supposé initialement au repos
- la transformée de Laplace F(p) d'une fonction f(t) s'écrit :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt$$

- théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

- théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

# 6- Réponse impulsionnelle d'un système

Pour voir si un système linéaire défini par T(p) est stable, on lui applique une perturbation et on observe l'évolution de s(t) :

- si la sortie s(t) retourne à la valeur 0 au bout d'un temps limité, on dira que le système est stable
- si s(t) augmente indéfiniment, le système est instable

Si la perturbation est une impulsion, la transformée de Laplace de la tension de sortie s'écrit, puisque E(p) = 1 :

$$\boxed{S(p)=T(p).E(p)=T(p)=K\frac{(p-z_1)(p-z_2)\dots(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_m)}}$$

Si on décompose cette sortie en éléments simples, on trouve la forme générale de la réponse à une impulsion :

$$S(p)=\frac{K_1}{p-p_1}+\frac{K_2}{p-p_2}+\dots+\frac{L_1}{p-m_1+jn_1}+\frac{L_1}{p-m_1-jn_1}+\dots$$

- $p_i$ sont les pôles réels et
- $m_i \pm jn_i$ sont les pôles complexes conjugués

En regroupant les termes relatifs aux pôles conjugués, on trouve :

$$S(p)=\frac{K_1}{p-p_1}+\frac{K_2}{p-p_2}+\dots+\frac{2L_1(p-m_1)}{(p-m_1)^2+n_1^2}+\dots$$

et la réponse à une impulsion s'écrit :

$$\boxed{s(t)=K_1e^{p_1t}+K_2e^{p_2t}+\dots+2L_1e^{m_1t}\cos(n_1t)+\dots}$$

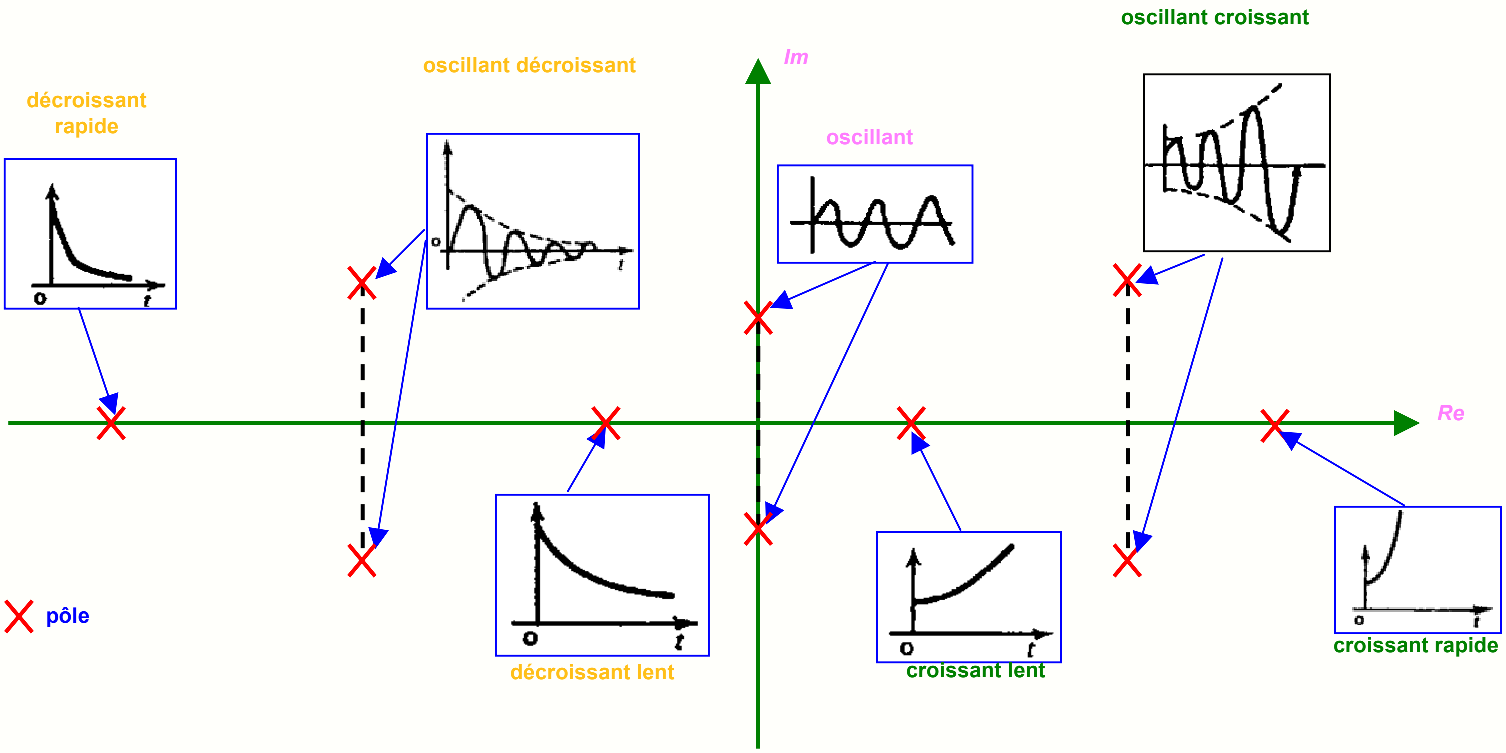
- les parties réelles des pôles réels ou complexes se retrouvent dans les termes exponentiels
- les parties imaginaires des pôles complexes conjugués se retrouvent dans les pulsations des termes oscillants

# 7- Stabilité d'un système linéaire

Pour que la sortie revienne au repos après une perturbation impulsionnelle :

- tous les termes exponentiels doivent être décroissants
- les pôles réels doivent donc être négatifs, ainsi que la partie réelle des pôles complexes

**Critère de stabilité : un système est stable si sa transmittance T(p) n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe.**



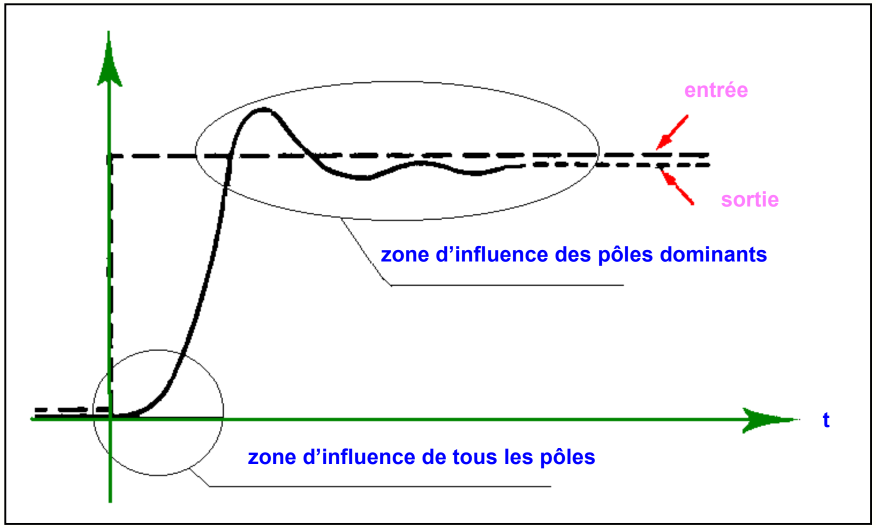

La figure montre la contribution d'un pôle sur la réponse d'un système en fonction de sa place dans le plan complexe.

**Applet : allure de la réponse en fonction de la place des pôles**

# 8- Les pôles dominants d'un système

Nous venons de voir que la réponse d'un système linéaire est déterminé par la position de ses pôles dans le plan complexe :

- un système du 10ème ordre a 10 pôles et sa réponse s(t) à une impulsion comporte au maximum 10 termes
- lorsque le temps s'écoule, ces termes s'éteignent les uns après les autres
- les termes de la réponse qui durent le plus longtemps correspondent aux pôles les plus proches de l'origine
- on appelle ces pôles les pôles dominants et ce sont eux qui fixent la forme de la réponse
- les pôles plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire



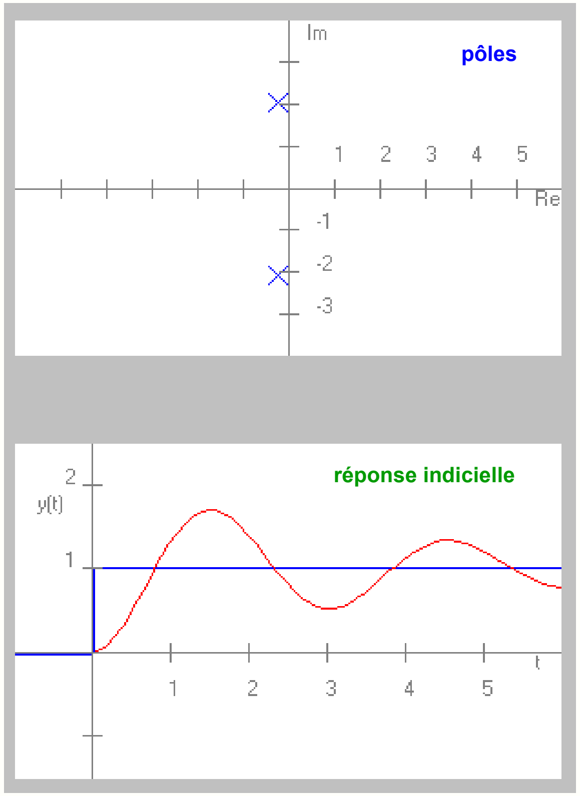

Ce résultat a des conséquences pratiques très utiles:

- un système d'ordre élevé a, sauf exception, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un 1er ou un 2ème ordre
- on peut simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants
- un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent
- négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées

# 9- Application : comparaison de deux systèmes

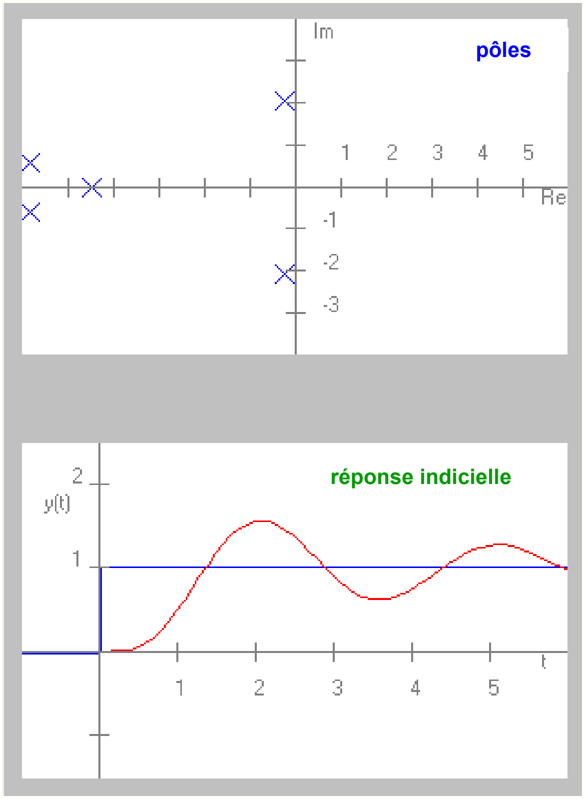
Le système A est caractérisé par :

- système du second ordre
- possède deux pôles complexes conjugués
- dépassement 68%
- pic à 1,5 seconde




Le système B est caractérisé par :

- système du cinquième ordre
- 2 pôles dominants identiques aux pôles de A
- dépassement 56%
- pic à 2,1 seconde




Remarque : les réponses à un échelon de ces 2 systèmes sont voisines sans être tout à fait identiques. On pourra donc dans la plupart des cas assimiler ce 5ème ordre à un 2ème ordre, avec toutes les simplifications de calcul qui en découlent.

# 10- Les systèmes passe-bas

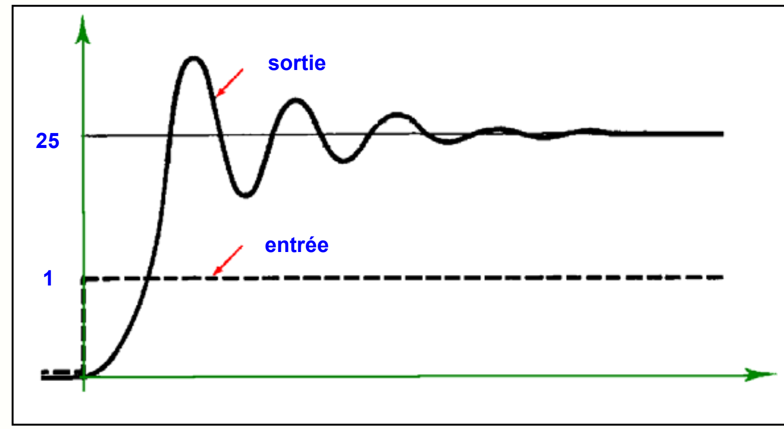
La plupart des systèmes électriques ou électromécaniques rencontrés dans la pratique sont des passe-bas :

- les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel …) ont toujours une fréquence limite de fonctionnement
- l'inertie des pièces en mouvement empêche les systèmes électromécaniques de suivre aux fréquences élevées

⇒ ils ont un gain statique

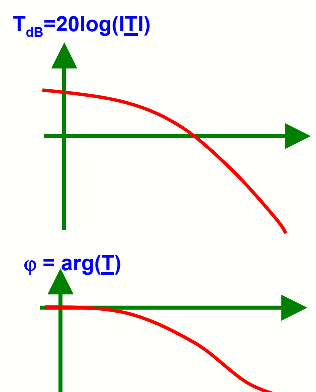
- un système est passe-bas si $T(0) \neq 0$
- l'amplification en continu se mesure en régime permanent
- elle se calcule en faisant $p=0$ dans la transmittance $T(p)$
- elle se calcule en faisant $\omega=0$ dans $\underline{T}(j\omega)$

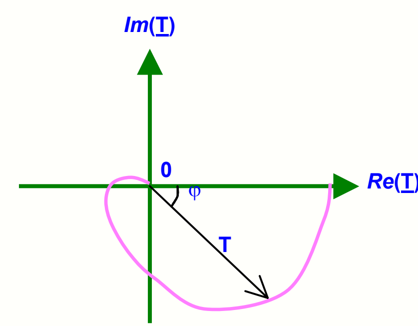
**Amplification en continu : 25**




⇒ ils ne « passent » pas les fréquences élevées

- un système est passe-bas si $T(p) \to 0$ quand $p \to \infty$
- le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur
- le module de la transmittance chute aux fréquences élevées
- le diagramme de Nyquist finit en 0 si la fréquence augmente



# 11- Réponse indicielle d'un passe-bas du 1er ordre

Les systèmes passe-bas qui ont une réponse de ce type sont ceux qui ont :

- un seul pôle p réel négatif ou
- plusieurs pôles p1, p2, p3 … avec un pôle p1 dominant soit Ip2I, Ip3I …>>Ip1I

⇒ la transmittance de Laplace peut toujours se mettre sous la forme « standard » :

$$\boxed{T(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}}$$

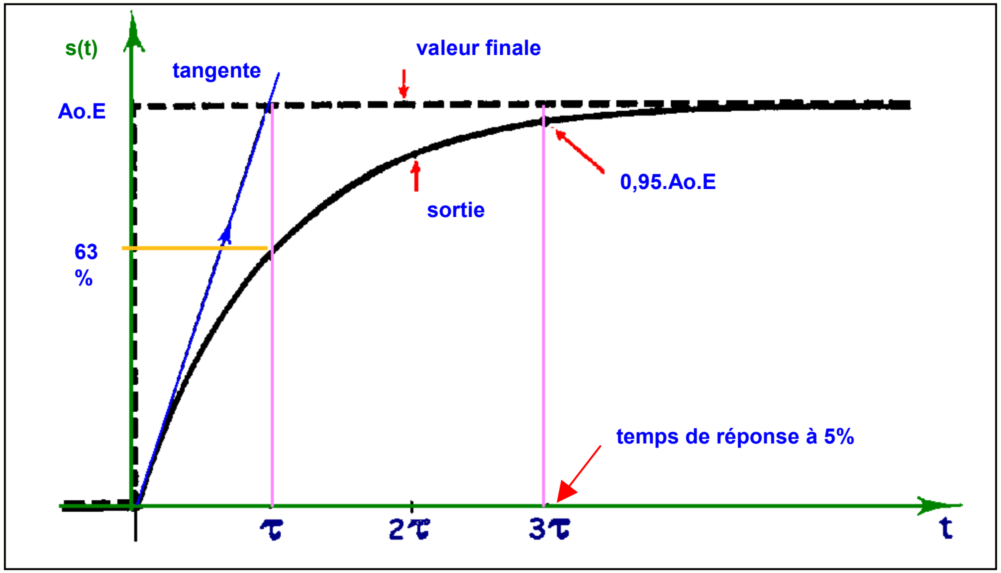
Ao amplification statique
τ constante de temps

⇒ la réponse à un échelon d'amplitude E a pour expression :

$$\boxed{s(t) = A_0 E(1 - e^{-t/\tau})}$$

⇒ la valeur finale vaut Ao.E et le temps de réponse tr à 5% vaut

$$\boxed{t_r = 3.\tau}$$




Au bout d'un temps $t = \tau$

- la tangente à l'origine coupe la valeur finale
- la réponse est à 63% de la valeur finale

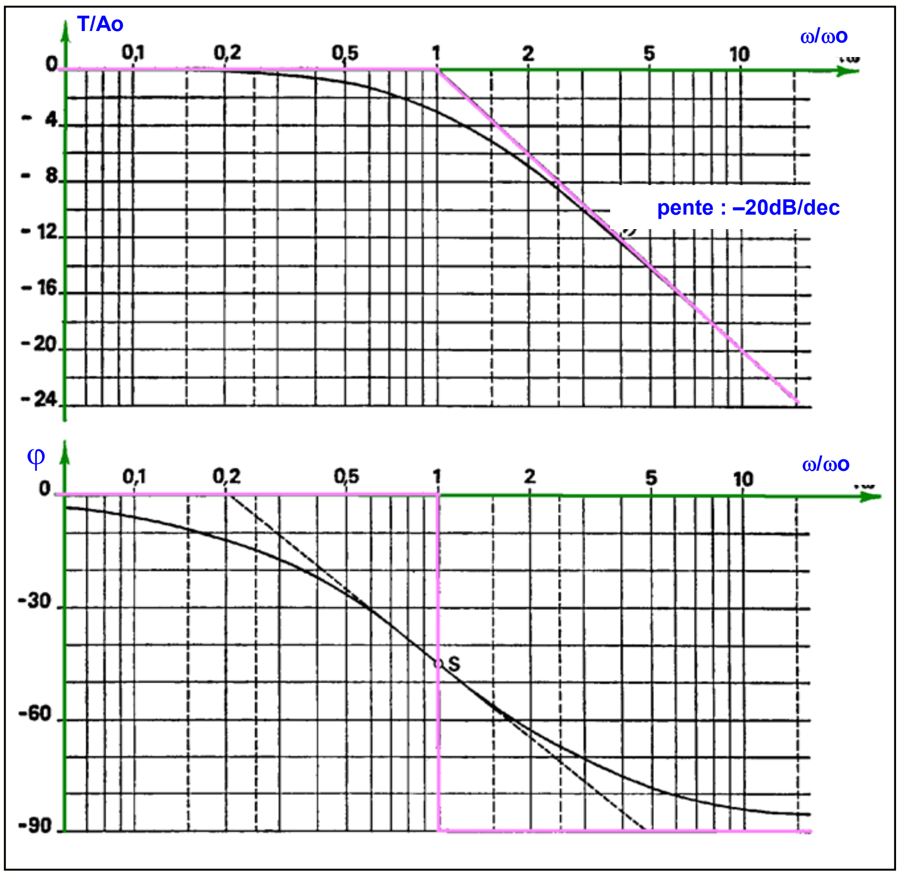
# 12- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 1er ordre

⇒ la transmittance complexe s'écrit facilement sous une forme standard classique :

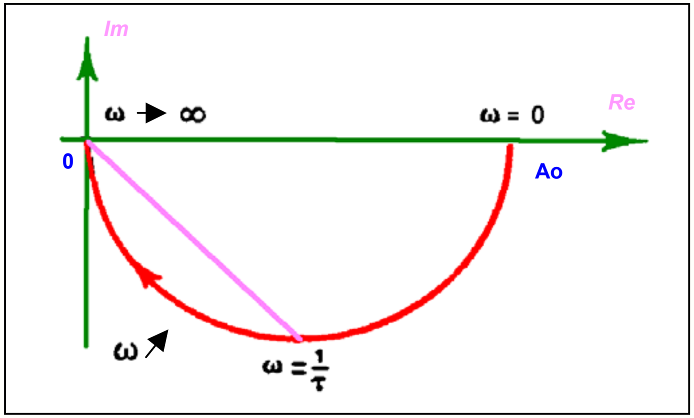
$$\underline{T}(j\omega)=\frac{Ao}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

avec une pulsation de coupure $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$

⇒ le diagramme de Bode a l'allure suivante :




⇒ le diagramme de Nyquist est un cercle :



# 13- La réponse indicielle d'un passe-bas du 2ème ordre (1)

Un système du second ordre a une transmittance qui peut toujours s'écrire sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

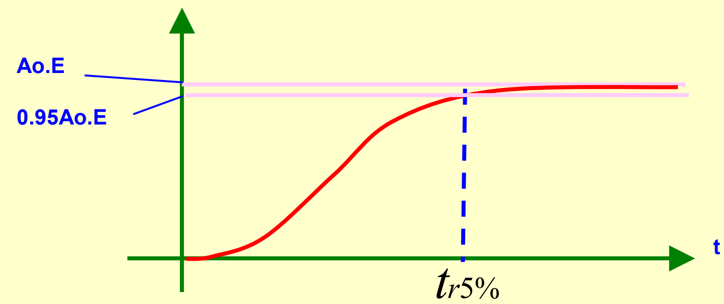
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m > 1, T(p) a deux pôles réels p1 et p2

- la transmittance peut se factoriser
- cas peu intéressant, le système est trop lent
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{(1 - \frac{p}{P_1})(1 - \frac{p}{p_2})}$$

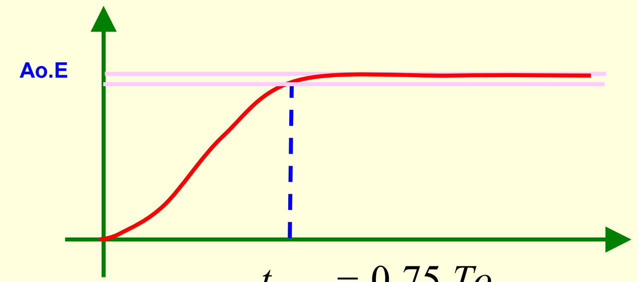



$$s(t) = 1 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

⇒ si m = 1, T(p) a un pôle double po

- la transmittance peut se factoriser
- ce cas correspond au régime critique
- cas souvent jugé trop lent
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{(1 - \frac{p}{P_0})^2}$$




$$t_{r5\%} = 0{,}75.To$$

$$s(t) = 1 - e^{p_0 t}(1 + p_0 t)$$

# 14- La réponse indicielle d'un passe-bas du 2ème ordre (2)

Un système du second ordre a une transmittance qui peut toujours s'écrire sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

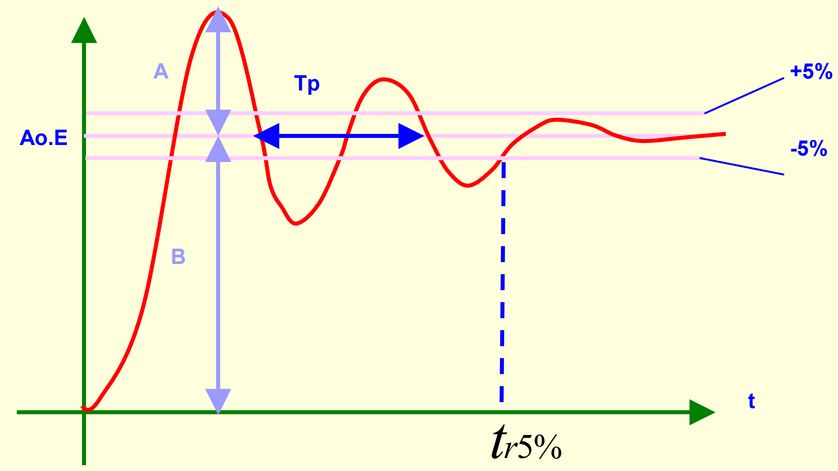
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m < 1, T(p) a deux pôles complexes conjugués p1 et p2

- la transmittance ne peut pas se factoriser
- les régimes transitoires sont satisfaisants si 0,3 < m < 1
- le dépassement vaut d = A/B
- la transmittance s'écrit :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$




- les deux pôles ont pour expression:

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega_1 t + \varphi)$$

avec

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1-m^2}$$

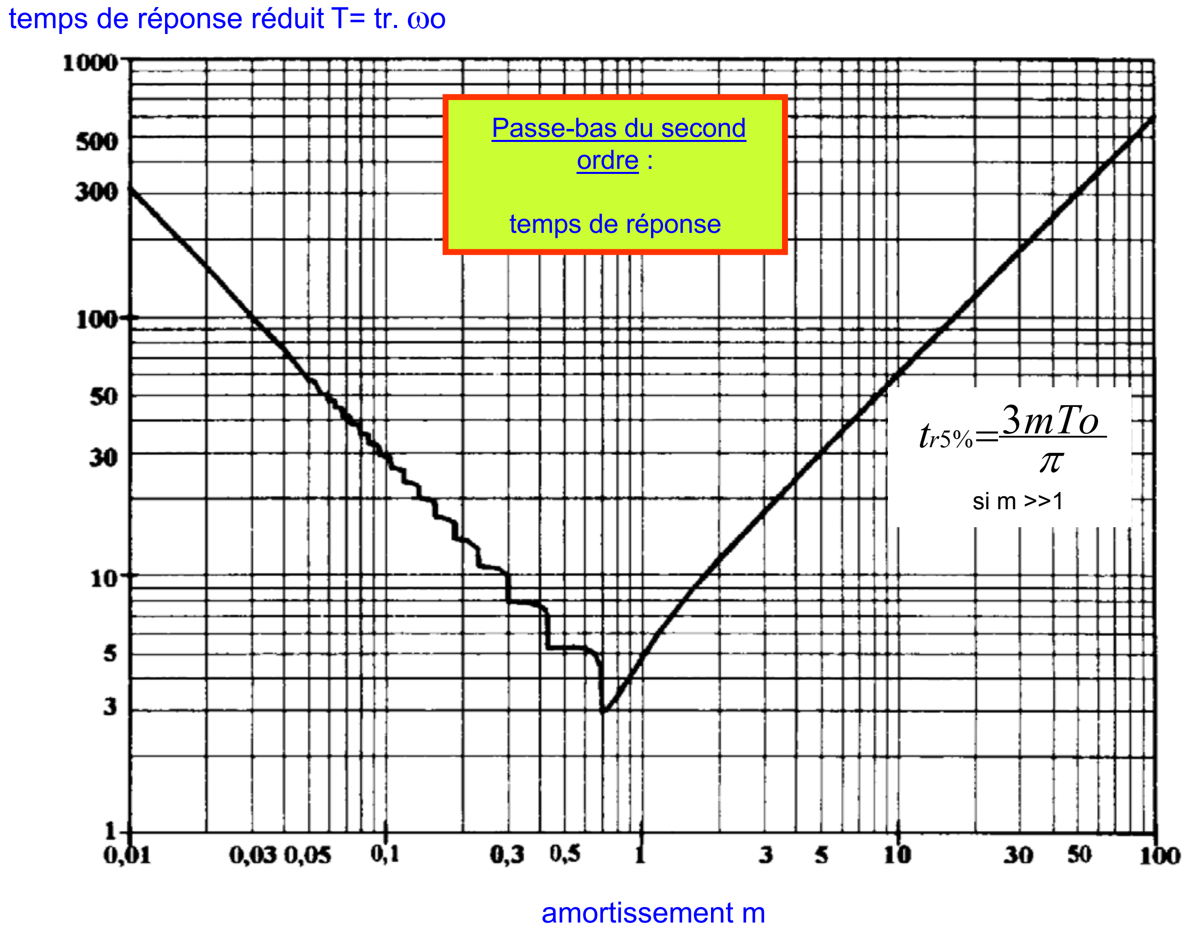
$$\cos(\varphi) = m$$

- pseudo-période: $T_p = \frac{To}{\sqrt{1-m^2}}$

# 15- Influence de m sur le temps de réponse

Pour obtenir le temps de réponse tr à 5% du système pour une valeur d'amortissement m :

- lire le temps de réponse réduit T = tr.ωo
- diviser cette valeur par la pulsation propre : tr = T/ ωo




Exemple

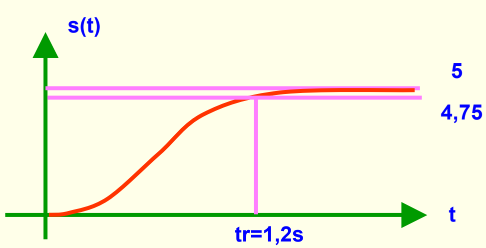
Un système est caractérisé par :

- pulsation propre ωo = 10 rad/s
- amortissement m = 2
- transmittance statique Ao = 5

Son temps de réponse tr vaut :

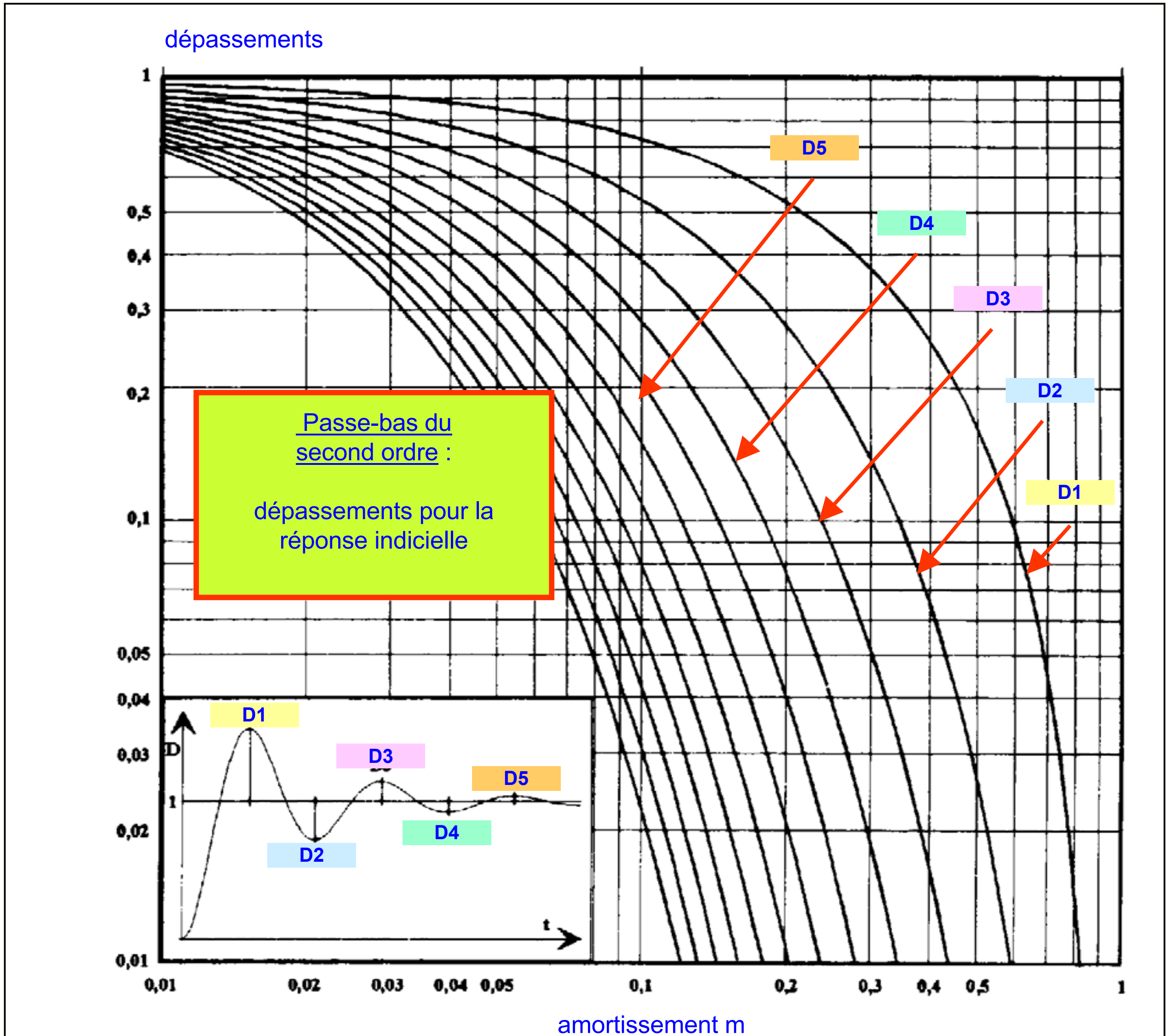
- T = 12 (donné par l'abaque)
- tr = T/ ωo = 12/10 = 1,2 s

Allure de sa réponse indicielle :



# 16- Influence de m sur le dépassement

L'abaque ci-dessous donne les dépassements de la réponse indicielle pour une valeur d'amortissement m :




Exemple

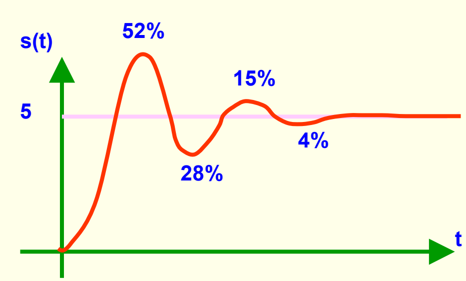
Un système est caractérisé par

- pulsation propre $\omega o$ = 10 rad/s
- amortissement m = 0,2
- transmittance statique Ao = 5

Les dépassements valent :

- D1 = 0,52 = 52%
- D2 = 0,28 = 28%
- D3 = 0,15 = 15%
- D4 = 0,04 = 4%

Allure de sa réponse indicielle :



# 17- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 2ème ordre (1)

Un système du second ordre a une transmittance complexe qui s'écrit sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

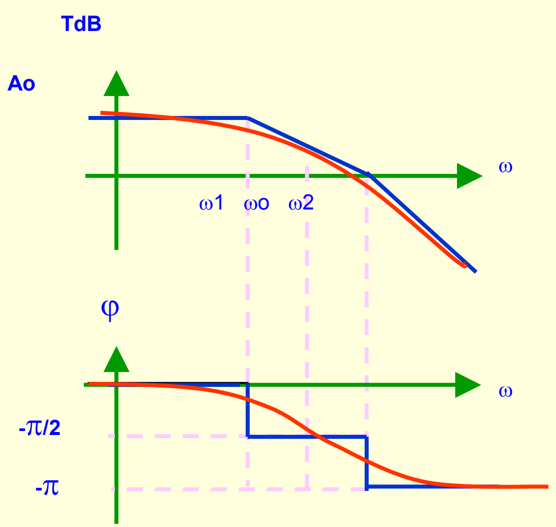
avec

- Ao : amplification statique
- m : amortissement
- ωo : pulsation propre

⇒ si m > 1, la transmittance a deux pôles réels

- la transmittance se factorise
- le diagramme de Bode a 2 cassures
- la courbe passe à -3dB sous les cassures
- la pente passe à –20, puis à –40dB/dec

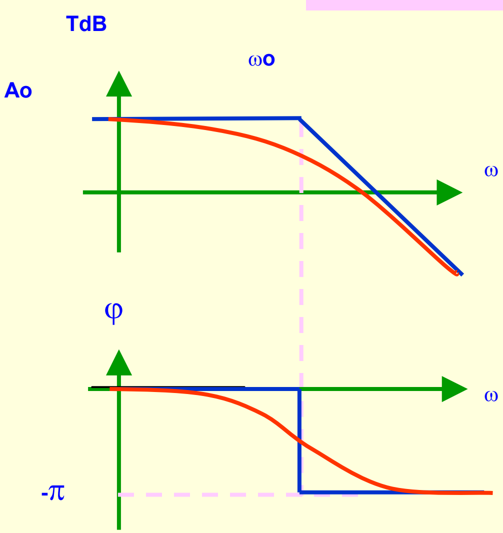
$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1})(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2})}$$




⇒ si m = 1, la transmittance a un pôle double po

- la transmittance se factorise
- le diagramme de Bode a une cassure double
- la courbe passe à -6dB sous la cassure
- la pente est de –40dB/dec après ωo

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0})^2}$$



# 18- Réponse en fréquence d'un passe-bas du 2ème ordre (2)

Un système du second ordre a une transmittance complexe qui s'écrit sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

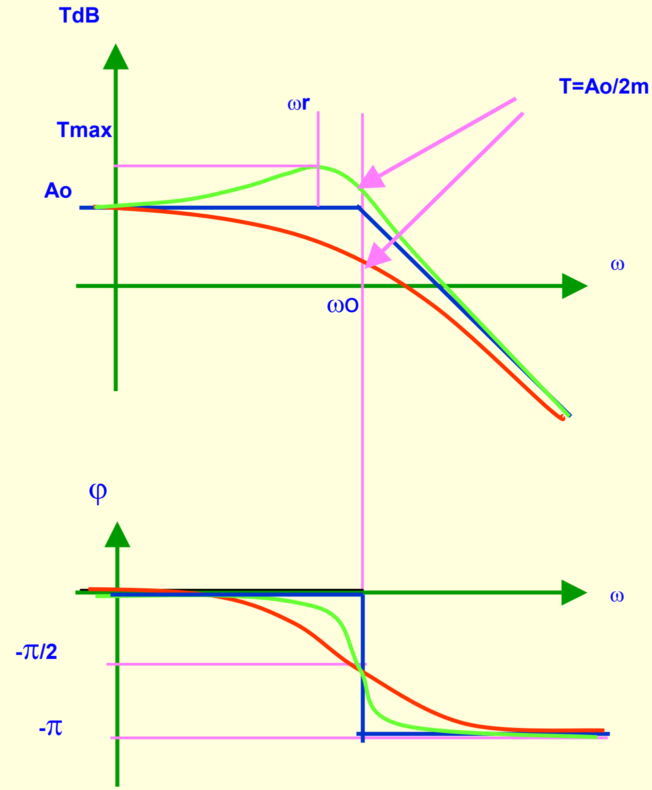
avec

- $A_o$ : amplification statique
- $m$ : amortissement
- $\omega_o$ : pulsation propre

⇒ si $m < 1$, deux pôles conjugués $p_1$ et $p_2$

- la transmittance ne peut pas se factoriser
- à la cassure, le module vaut $T = A_o/2m$
- si $m < 0{,}707$ le module passe par un maximum
- l'allure des courbes de gain et de phase dépend de m
- la pente est de –40dB/dec après $\omega_o$

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$




- le maximum de valeur Tmax se trouve à $\omega_r$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

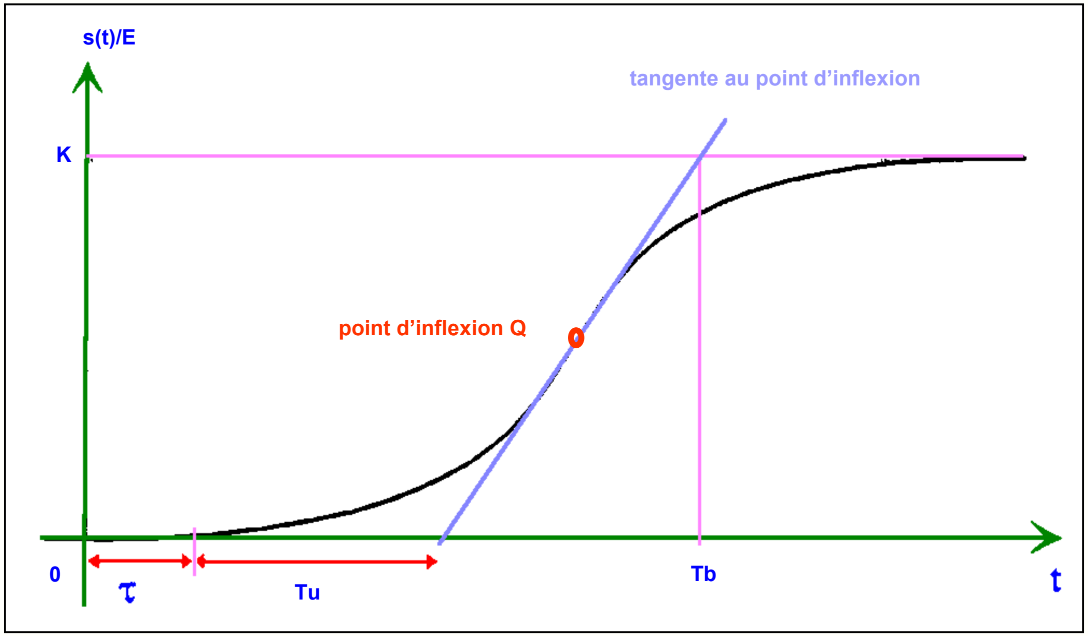
# 19- Modélisation d'un système

Plusieurs techniques ont été développées à l'usage des industriels qui ont besoin de modéliser leur système pour en connaître la transmittance T(p).

La méthode de Strejc, par exemple, permet de trouver l'expression de T(p) à partir de l'enregistrement de sa réponse indicielle dans le cas où le processus a une fonction de transfert :

- sans pôle à l'origine c'est-à-dire pas d'intégrateur
- sans pôles complexes conjugués, c'est-à-dire pas d'oscillations dans la réponse indicielle
- ayant n constantes de temps T
- admettant éventuellement un retard pur $\tau$

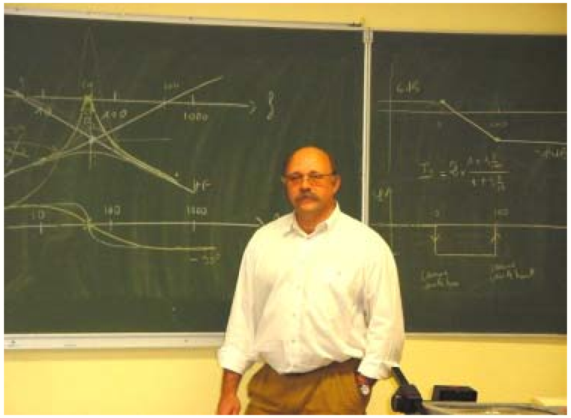
$$T(p) = K\frac{e^{-\tau p}}{(1+Tp)^n}$$




Mode opératoire :

- la valeur finale de s(t) donne K
- on trace la tangente au point d'inflexion Q
- on mesure les temps $\tau$, Tu et Tb
- on calcule Ta = Tb – (Tu + $\tau$ ) puis Tu/Ta
- si Tu/Ta $\approx$ 0 alors n = 1
- si Tu/Ta $\approx$ 0,1 alors n = 2
- si Tu/Ta $\approx$ 0,2 alors n = 3
- si Tu/Ta $\approx$ 0,3 alors n = 4

Zillisheim - l'étang en hiver



# FIN