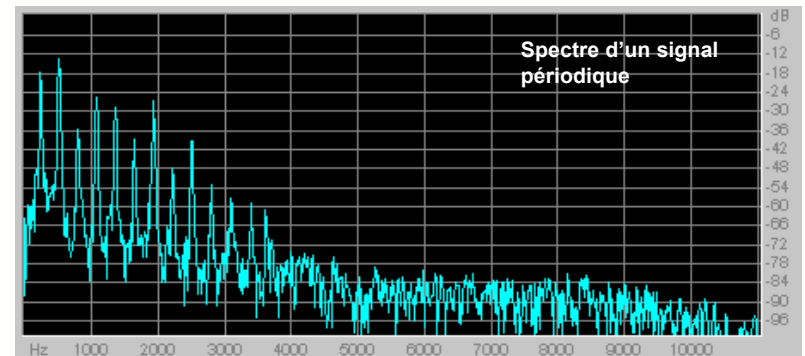
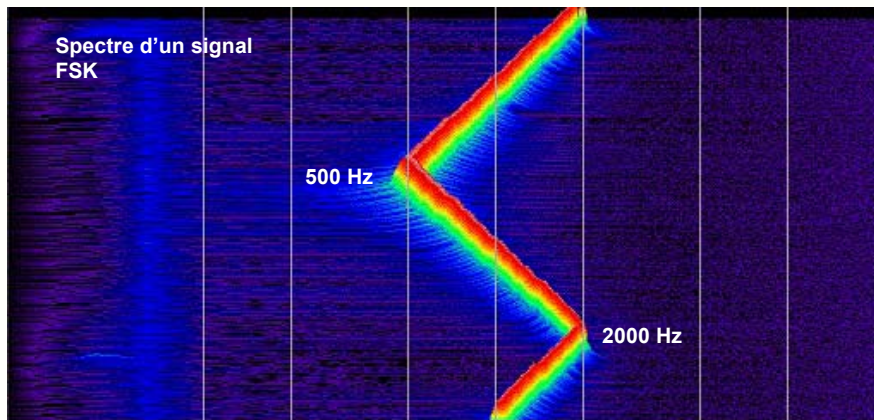
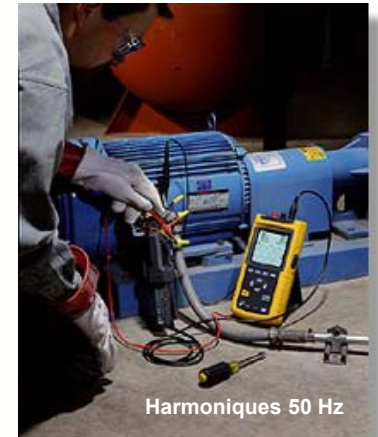




# Analyse spectrale





- 1- La représentation temporelle d'un signal
- 2- La représentation fréquentielle du signal
- 3- Exemple du spectre d'un signal sinusoïdal
- 4- Instrumentation : l'analyseur à balayage
- 5- Instrumentation : l'analyseur numérique
- 6- Signaux à spectre stable dans le temps
- 7- Exemple de signal à spectre stable
- 8- Signaux à spectre variable dans le temps
- 9- Exemple de signal à spectre variable
- 10- Les outils mathématiques de l'analyse spectrale
- 11- La décomposition en série de Fourier
- 12- Spectre d'un signal périodique
- 13- Décomposition des signaux usuels
- 14- Spectre d'une impulsion
- 15- Harmoniques et timbre d'un son
- 16- Evolution des harmoniques d'une lame vibrante
- 17- Mesure de la distorsion harmonique
- 18- Mesure de la distorsion d'intermodulation
- 19- Diminution des rayonnements parasites
- 20- Les harmoniques sur le réseau 50 Hz
- 21- Conséquences des harmoniques sur le réseau
- 22- La transformée de Fourier
- 23- L'effet de fenêtre
- 24- La transformée de Fourier discrète
- 25- Exemple d'application de la TFD
- 26- La transformée de Fourier rapide ou FFT
- 27- Les fenêtres de pondération
- 28- Application : test d'un haut-parleur
- 29- Application : la FFT dans le domaine médical





# 1- La représentation temporelle d'un signal



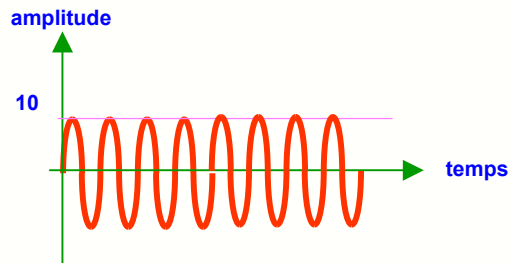
L'électronique traite des signaux analogiques ou numériques de natures très variées :

- le support du signal est le plus souvent une tension, mais peut aussi être un courant, une onde électromagnétique (radio, TV, radar), une onde lumineuse ou infrarouge (fibres optiques), une onde sonore ...
- l'information contenue dans le signal peut être un message audio (parole, musique), vidéo (image TV), binaire (liaison ordinateur-imprimante) ou un signal analogique traduisant l'état d'un capteur

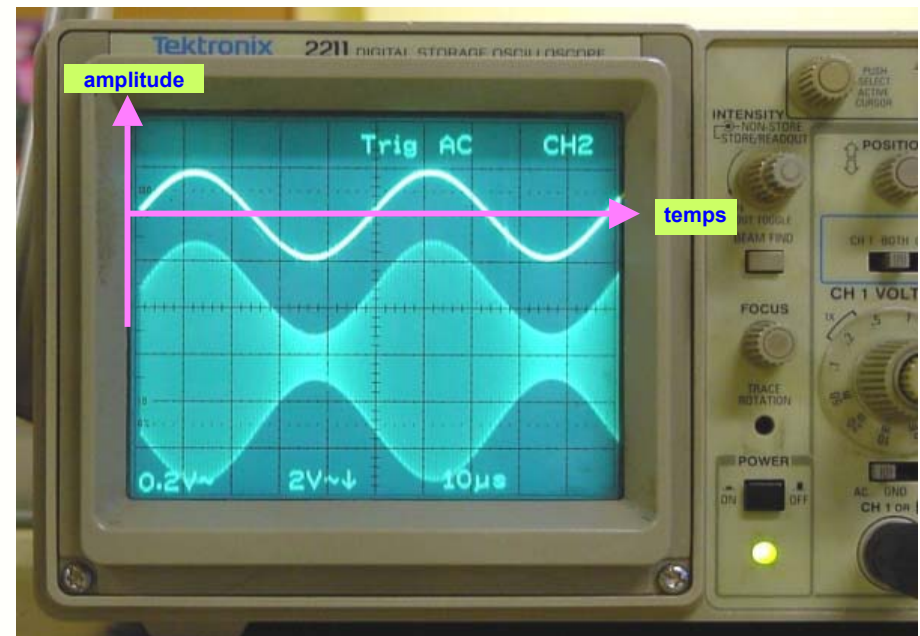
Une première façon de connaître un signal est d'observer son **allure en fonction du temps** donnée par l'**oscillogramme**.

**Exemple 2 :** signal sinusoïdal et signal modulé en amplitude

**Exemple 1 :** signal  $x(t) = 10\sin(400t)$



- c'est un signal sinusoïdal
- son amplitude est de 10 V
- sa pulsation vaut 400 radians/seconde
- sa fréquence vaut  $f = 63,7$  Hz



**Définition :** l'**oscillogramme d'un signal** est la représentation des variations de son amplitude en fonction du temps.

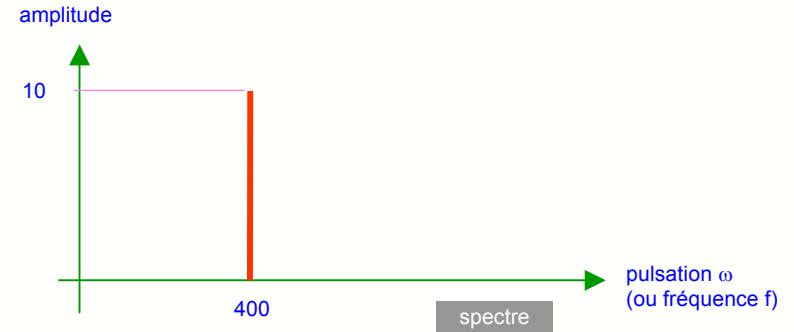
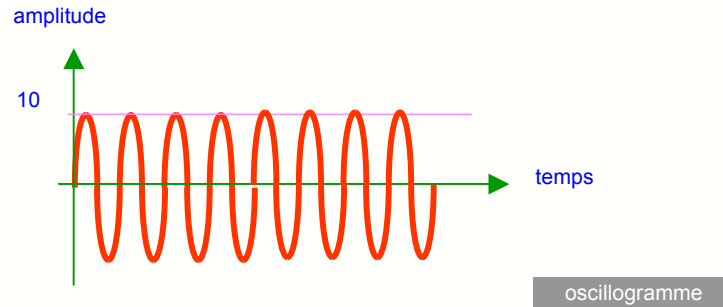
L'oscillogramme nous renseigne sur l'amplitude, la valeur crête, la valeur moyenne ... mais pas sur les fréquences contenues dans le signal.

## 2- La représentation fréquentielle d'un signal

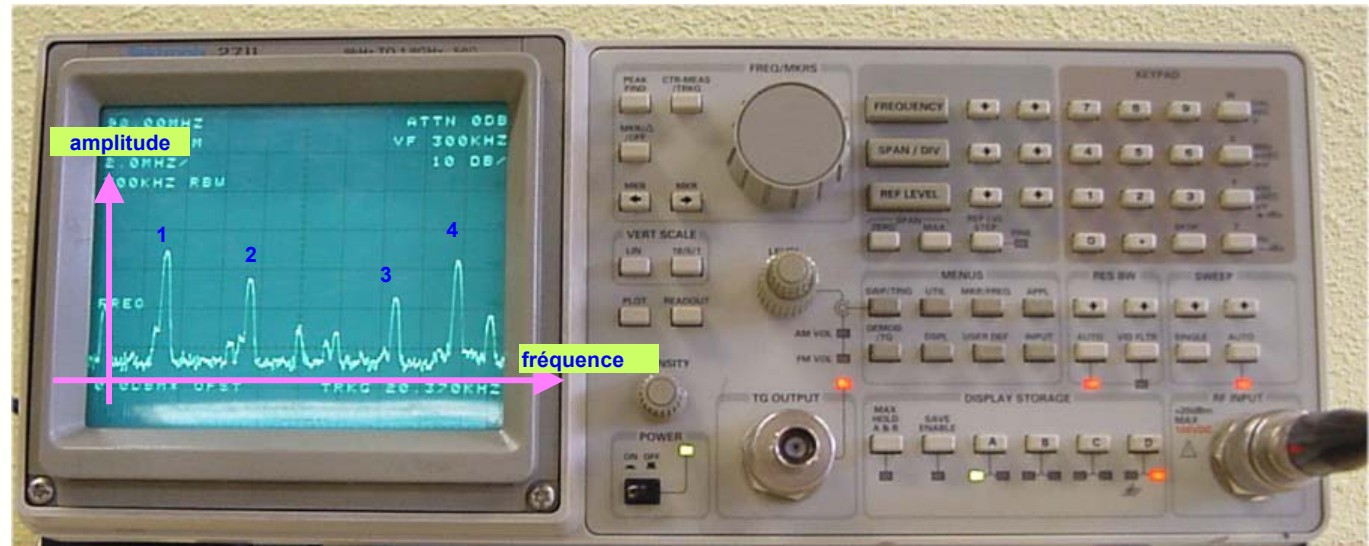


Pour voir les fréquences contenues dans un signal, on le représente sous la forme d'un diagramme amplitude-fréquence appelé **spectre** :

**Exemple 1** : le signal  $x(t) = 10\sin(400t)$  est un signal sinusoïdal d'amplitude 10 et de pulsation 400



**Exemple 2** : fréquences captées par une antenne entre 88 et 108 MHz ( bande FM )



**Définition** : le spectre est la représentation des amplitudes des différentes composantes en fonction de la fréquence

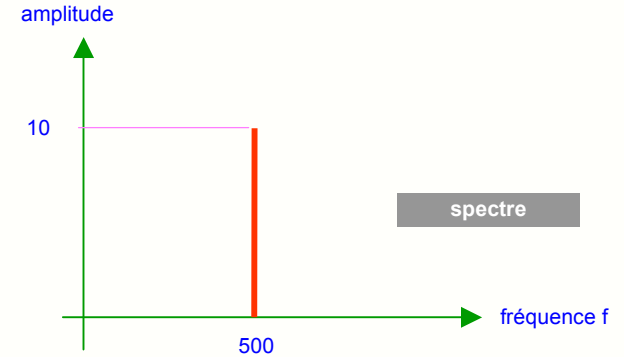
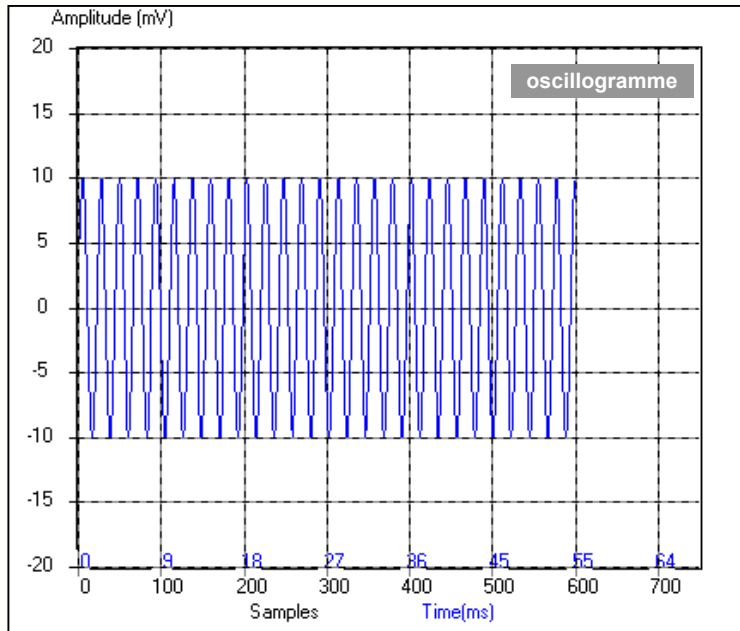


# 3- Exemple du spectre d'un signal sinusoïdal

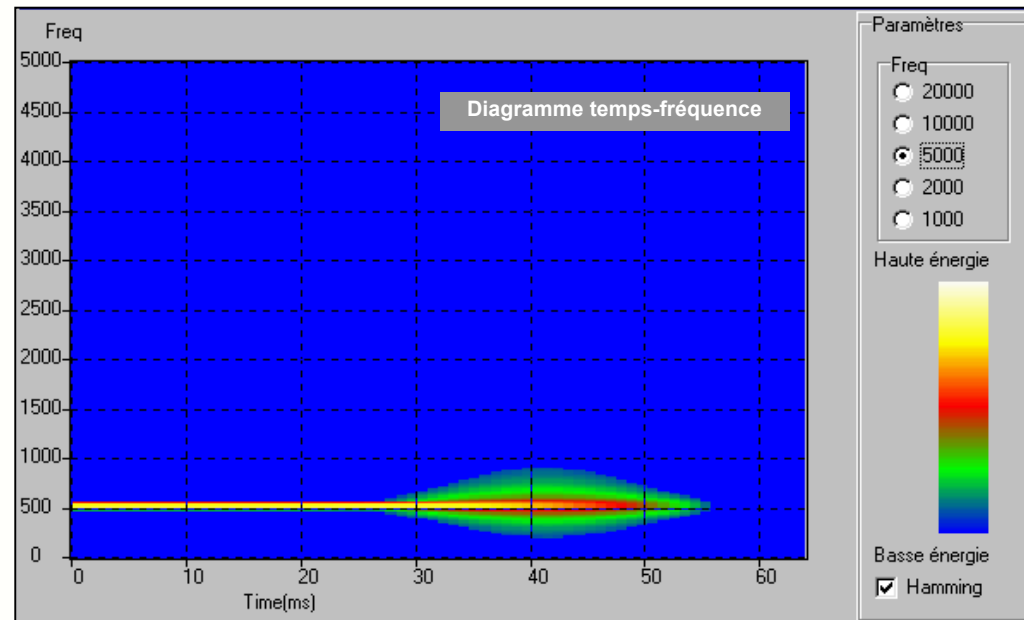


On s'intéresse au spectre d'un segment de **signal sinusoïdal de fréquence 500 Hz** :

- il dure 54 ms et est donc composé de 27 périodes
- son amplitude est de 10 mV crête
- pendant son existence, son spectre est formé d'une raie à 500 Hz



Pour visualiser l'évolution du spectre en fonction du temps, on utilise un diagramme temps-fréquence sur lequel la **couleur** indique l'intensité de la composante spectrale.





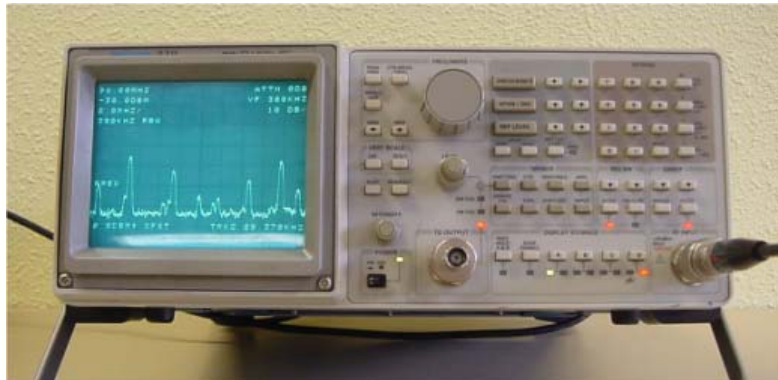
# 4- Instrumentation : l'analyseur à balayage



Pour visualiser le spectre d'un signal, on dispose de deux types d'instruments : l'analyseur à balayage et l'analyseur numérique.

L'analyseur à balayage fonctionne comme un récepteur à changement de fréquence en balayant la gamme de fréquences à analyser :

- il permet de visualiser le spectre de signaux de fréquences élevées, une fréquence maximale de 3 GHz étant une valeur courante
- à cause de son mode de fonctionnement, il ne permet pas de visualiser le spectre de signaux brefs et non répétitifs
- par contre, il est idéal pour visualiser des spectres de signaux stables dans le temps ou répétitifs



Tektronix 2712 : 9 kHz à 1,8 GHz

Anritsu MS2711 : 100 kHz à 3 GHz



Rohde+Schwarz : 100 kHz à 3 GHz

Les principaux réglages de l'appareil sont : la **plage de fréquence** visualisée ( fréquence centrale, déviation ), la **sensibilité** et la bande passante du **filtre d'analyse**.

**Analet** : principe de l'analyseur à balayage

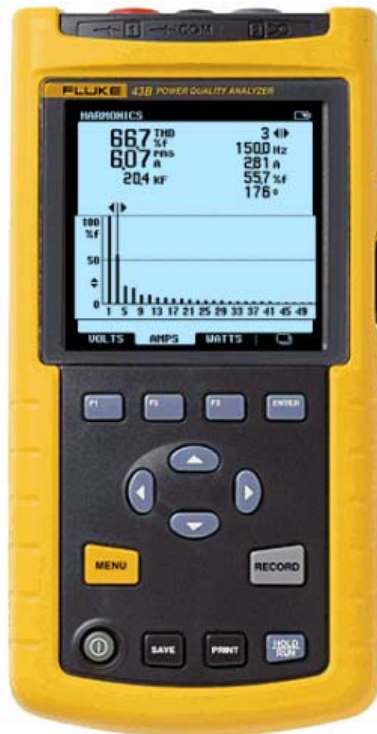
**Vidéo** : le fonctionnement de l'analyseur à balayage

## 5- Instrumentation : l'analyseur numérique



L'analyseur de spectre numérique échantillonne le signal à analyser et calcule des points du spectre à l'aide d'un algorithme de calcul qui est souvent une FFT ( Fast Fourier Transform) :

- il permet de visualiser le spectre de signaux dont la fréquence est limitée à quelques dizaines de MHz
- il peut faire l'acquisition de signaux non répétitifs et visualiser leur spectre
- il peut montrer l'évolution du spectre en fonction du temps pour les signaux qui ne sont pas stables
- de nombreuses options d'affichage permettent une visualisation optimale des spectres ( spectre unique, sonagramme, waterfall ...)
- il est souvent réalisé autour d'un PC par l'association d'une carte d'acquisition interne ou externe et un logiciel



Fluke 43B : analyseur des harmoniques du réseau 50 Hz



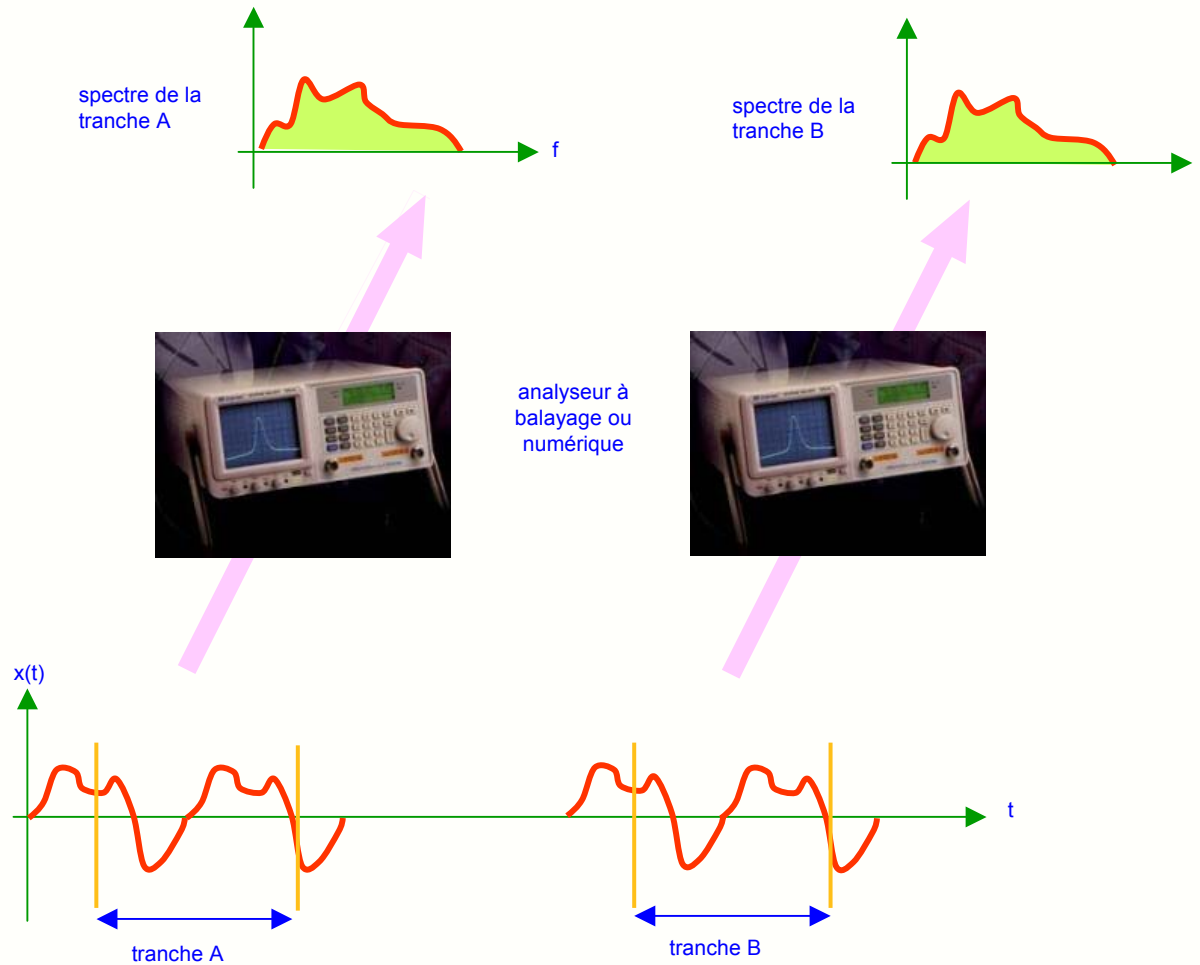
Onosokki DS2000 : 0 à 40 kHz

Les principaux réglages de l'appareil sont : la **plage de fréquence** visualisée ( fréquence centrale, déviation ), la **sensibilité** et le choix de la **fenêtre** de pondération.

## 6- Signaux à spectre stable dans le temps



Pour l'analyse spectrale, il existe un grand nombre de signaux dont l'essentiel de la **forme** reste **stable** dans le temps : leur spectre est fixe ou évolue peu dans le temps, la connaissance du spectre à un instant donné permet de bien connaître les caractéristiques du signal.



Dans cette catégorie, on trouve : les **signaux périodiques**, les **signaux modulés** en amplitude, en fréquence ou en phase, les **signaux vidéo** ...

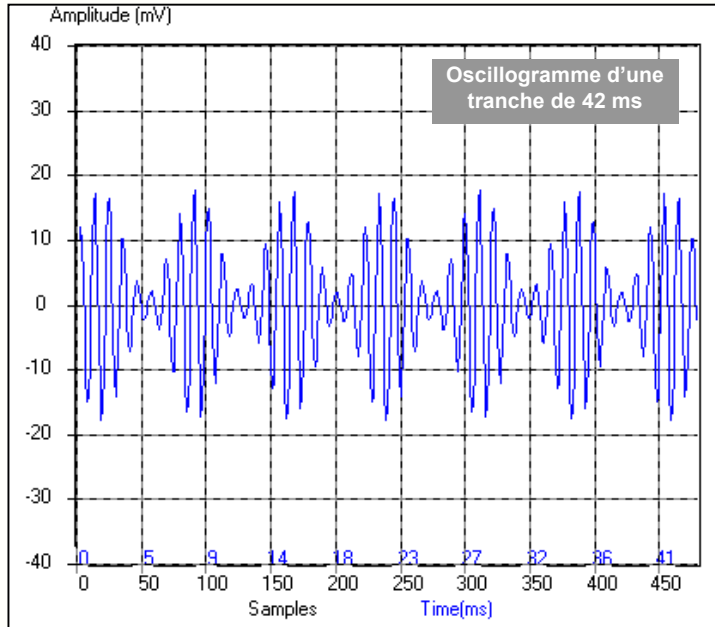




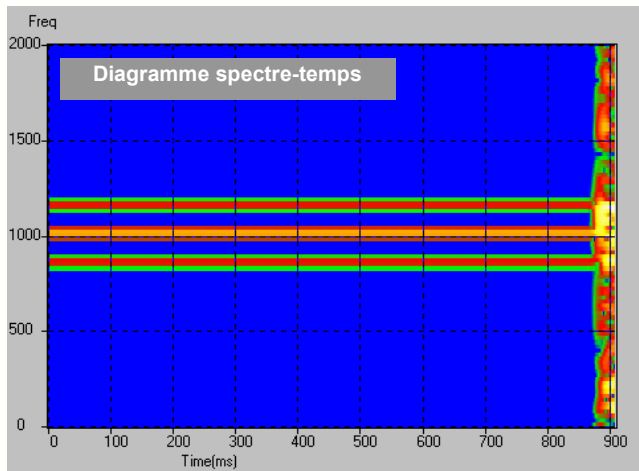
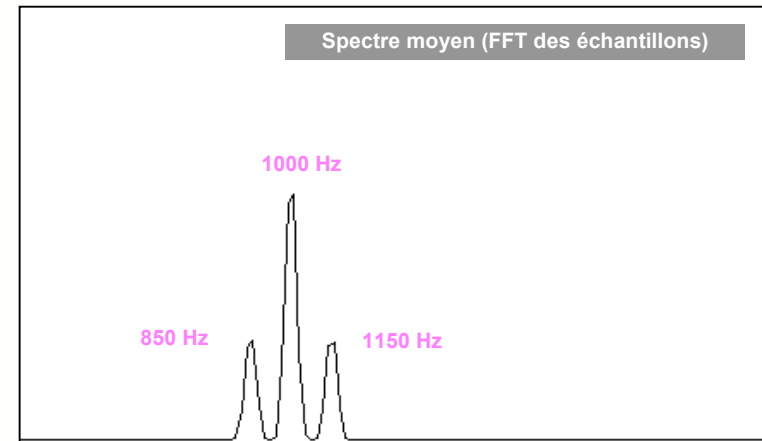
# 7- Exemple de signal à spectre stable



La séquence analysée correspond à un **signal modulé en amplitude** :



- nombre d'échantillons :  $N = 10\ 000$
- fréquence d'échantillonnage :  $f_e = 11025\ \text{kHz}$
- fréquence de la porteuse :  $f = 1000\ \text{Hz}$
- signal modulant sinusoïdal à  $F = 150\ \text{Hz}$



### Remarques :

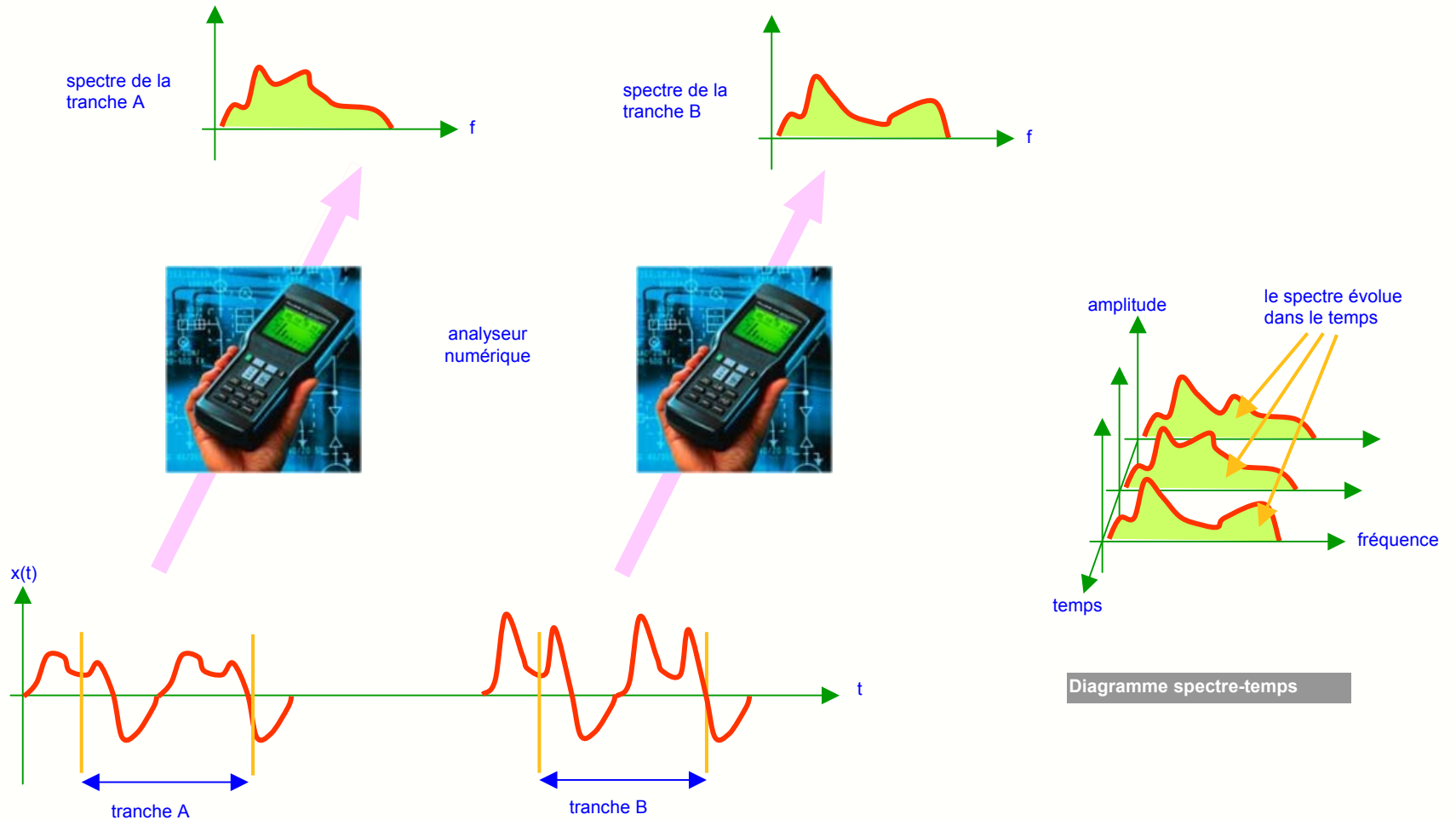
- on retrouve sur le spectre moyen et le diagramme spectre-temps la **porteuse** à 1000 Hz et les **2 raies latérales** à 850 et 1150 Hz
- l'oscillogramme montre que le signal est stable dans le temps
- le diagramme spectre-temps montre que le spectre ne change pas lorsque le temps s'écoule
- le spectre FFT du signal est donc suffisant pour connaître les propriétés fréquentielles du signal



# 8- Signaux à spectre variable dans le temps



L'autre famille correspond aux signaux dont la **forme** et donc le **spectre** évoluent au cours du temps : la connaissance du spectre à des instants successifs est alors très riche en informations.



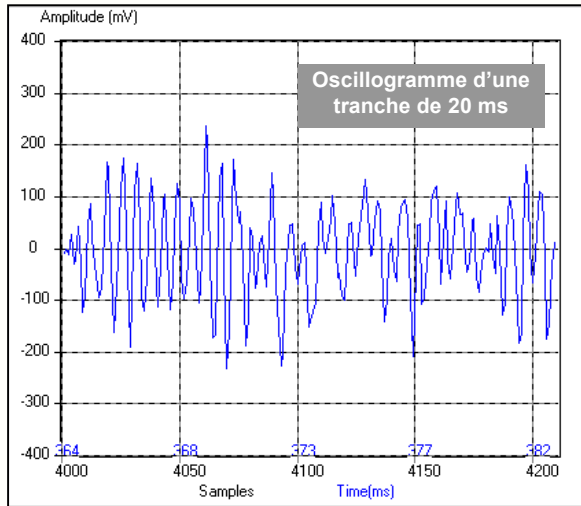
Dans cette catégorie, on trouve : les signaux **vocaux** ou **musicaux**, les signaux **biologiques**, ceux **issus de capteurs** ...



# 9- Exemple de signal à spectre variable



La séquence sonore analysée correspond à un enregistrement du chant d'un groupe de baleines :



- nombre d'échantillons :  $N = 50\ 000$
- fréquence d'échantillonnage :  $f_e = 11\ 025\ \text{kHz}$
- durée  $D = N \cdot T_e = 4,54\ \text{secondes}$

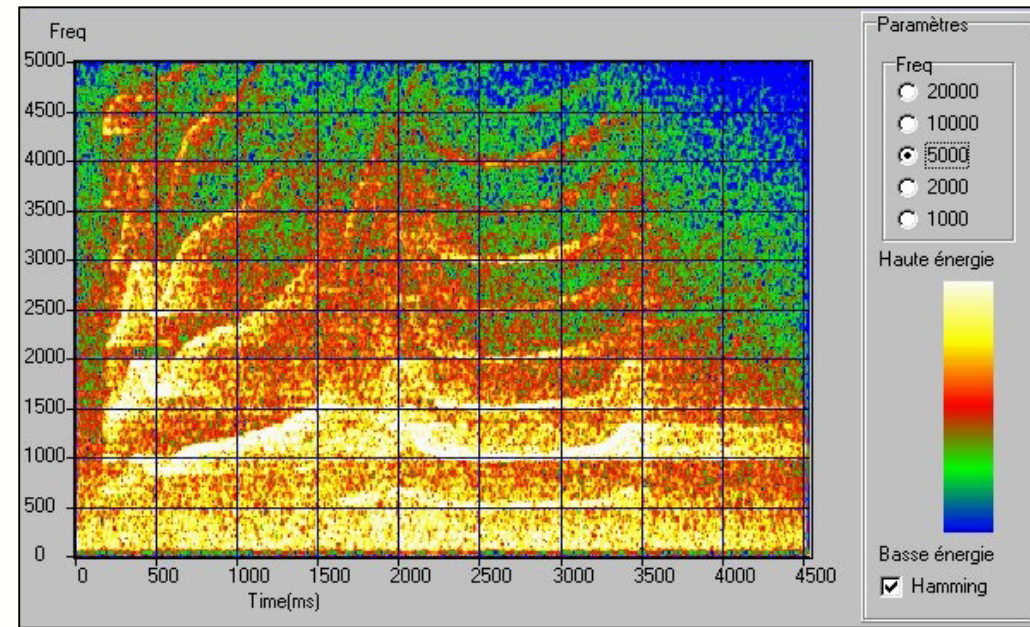
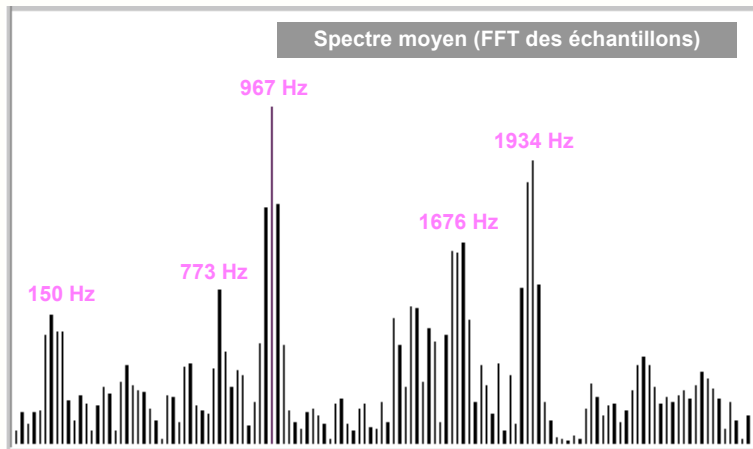


Diagramme spectre-temps (sonagramme)

### Remarques :

- on retrouve sur le spectre moyen et le sonagramme les composantes intenses autour de 1000, 1650 et 2000 Hz
- on reconnaît sur le sonagramme les variations de hauteur perçues à l'oreille
- le sonagramme est beaucoup plus riche en informations que le spectre FFT

Son : écouter le chant des baleines

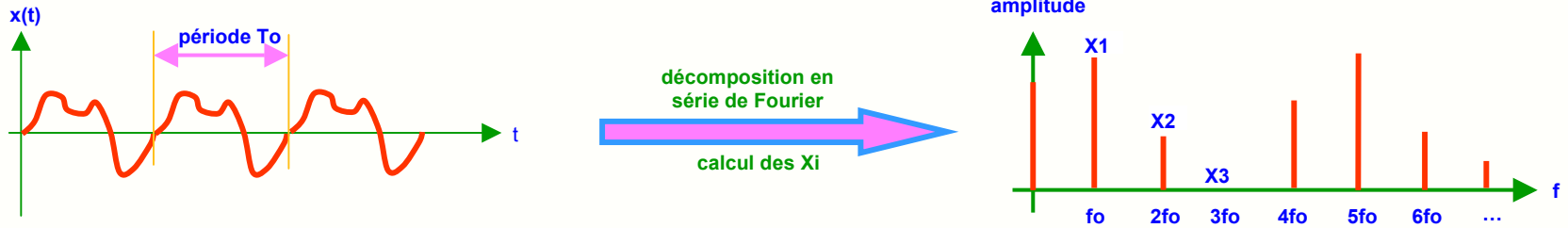


# 10- Les outils mathématiques de l'analyse spectrale

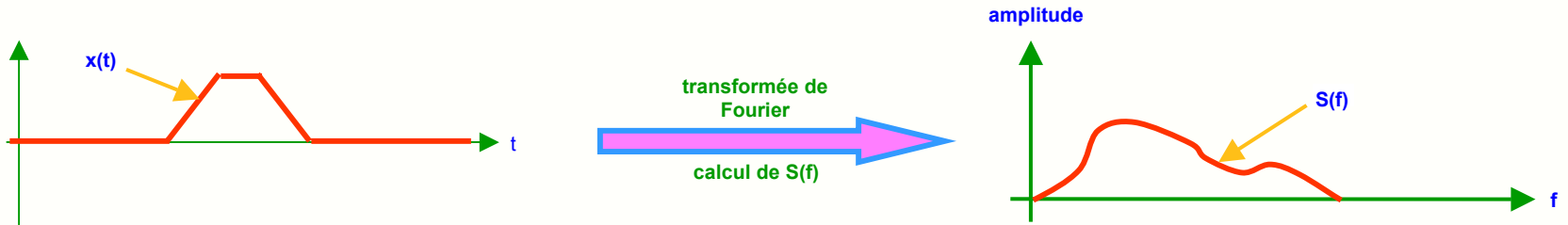


En fonction du type de signal, on dispose de 3 outils mathématiques pour calculer le spectre d'un signal  $x(t)$  :

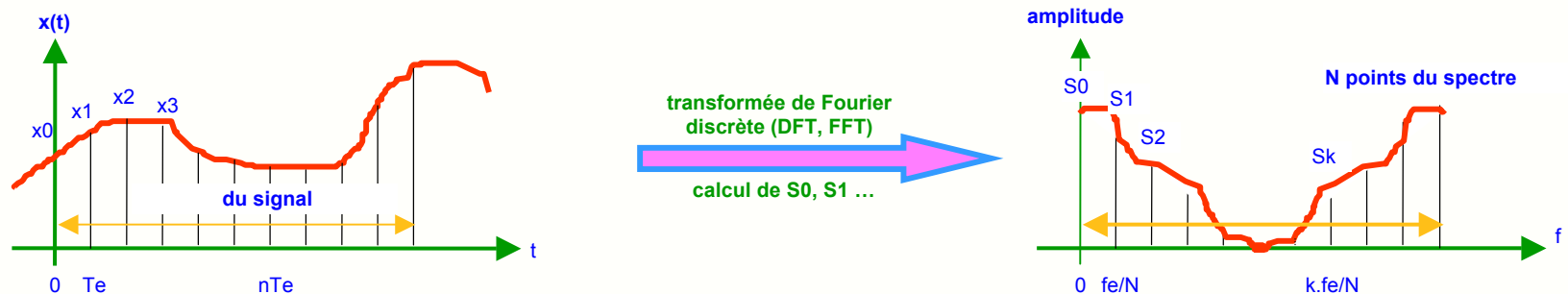
- si le signal  $x(t)$  est périodique, la **décomposition en série de Fourier** permet de calculer l'amplitude des raies du spectre



- si l'équation du signal  $x(t)$  est connue, la **transformée de Fourier** permet de calculer l'équation de la courbe du spectre



- si on dispose de  $N$  échantillons du signal  $x(t)$ , la **transformée de Fourier discrète** permet de calculer  $N$  points de la courbe du spectre

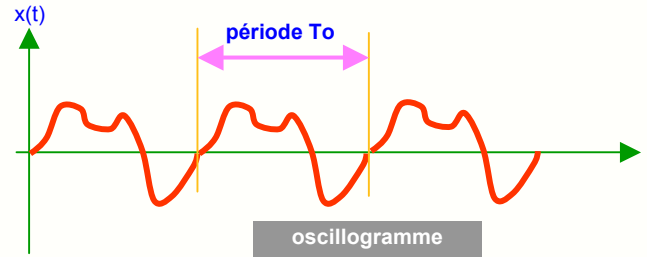




# 11- La décomposition en série de Fourier



Soit  $x(t)$  un signal de forme quelconque mais périodique :



Le mathématicien Fourier a démontré qu'il peut s'écrire sous la forme :

$$x(t) = X_0 + X_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + X_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + X_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) + \dots$$

↑ valeur moyenne  
 ↑ amplitude du fondamental  
 ↑ amplitude de l'harmonique 2  
 ↑ amplitude de l'harmonique n



Jean-Baptiste Fourier 1768-1830

Cette décomposition peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$x(t) = X_0 + A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(2\omega_0 t) + B_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) + \dots$$

avec :

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_T x(t) dt \qquad A_n = \frac{2}{T_0} \int_T x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \qquad B_n = \frac{2}{T_0} \int_T x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Ces décompositions sont bien sûr équivalentes et on a :  $X_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  et  $\varphi_n = \arctg\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$

Les fonctions paires ont un développement qui ne contient que des termes en cosinus, les fonctions impaires ont une décomposition en sinus : cette remarque utile permet souvent de simplifier le calcul.

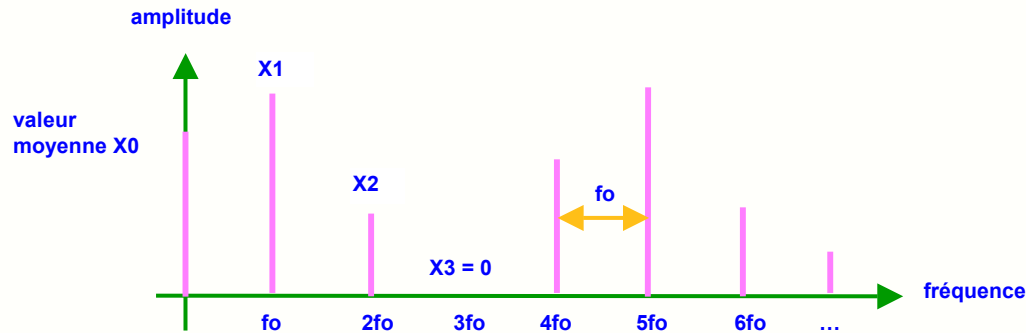
**Applet : calcul de la décomposition de Fourier d'un signal**



# 12- Spectre d'un signal périodique

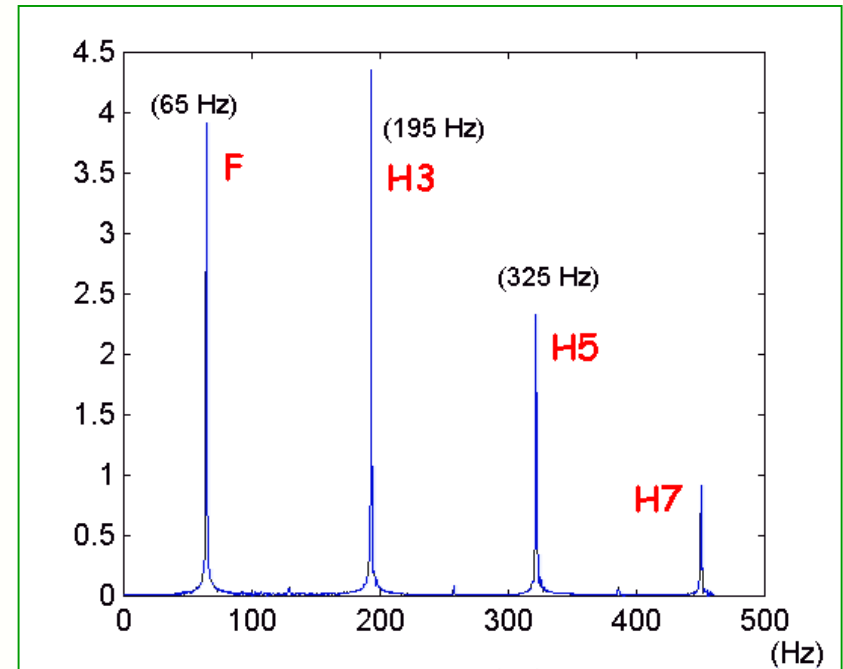


La décomposition en série de Fourier permet de tracer aisément le spectre de  $x(t)$  constitué par des raies équidistantes :



## Exemple : analyse spectrale du son d'un didjeridu

- le son est périodique et son spectre est un spectre de raies
- le fondamental est à 65 Hz
- le signal ne contient pas d'harmoniques pairs
- l'harmonique 3 a une amplitude supérieure au fondamental



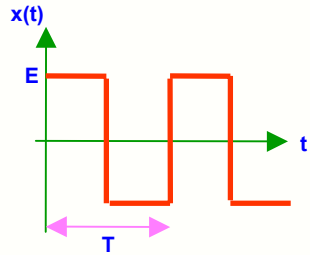


# 13- Décomposition des signaux usuels

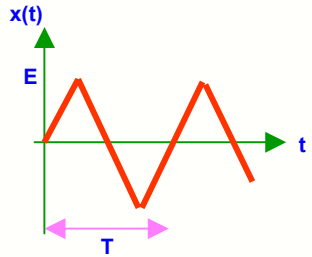
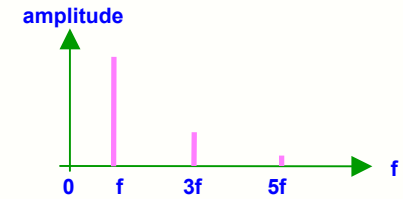


oscillogramme

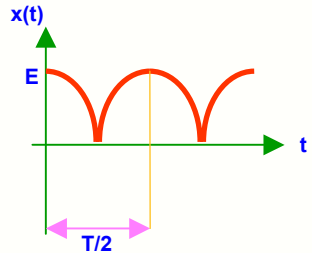
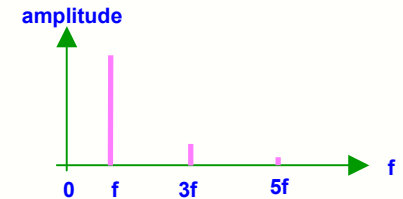
spectre



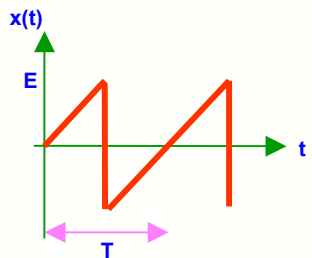
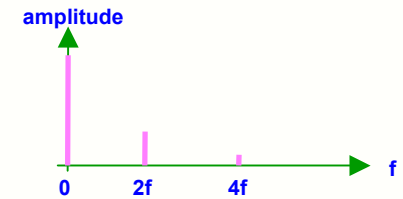
$$x(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



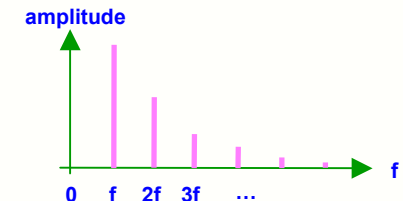
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \dots \right]$$



$$x(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ 1 + \frac{2 \cos(2\omega t)}{3} - \frac{2 \cos(4\omega t)}{15} + \dots \right]$$



$$x(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \dots \right]$$

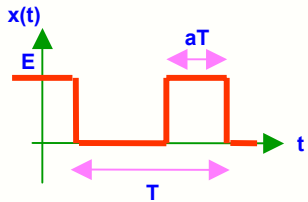




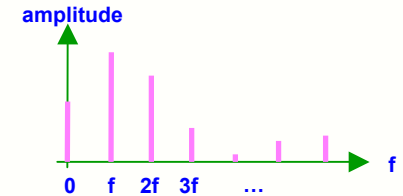
# 14- Spectre d'une impulsion



Le train d'impulsions est d'une grande importance en électronique et son spectre a une allure caractéristique :



$$x(t) = aE \left[ 1 + \frac{2\sin(\pi a)}{\pi a} \cos(\omega t) + \dots + \frac{2\sin(n\pi a)}{n\pi a} \cos(n\omega t) + \dots \right]$$



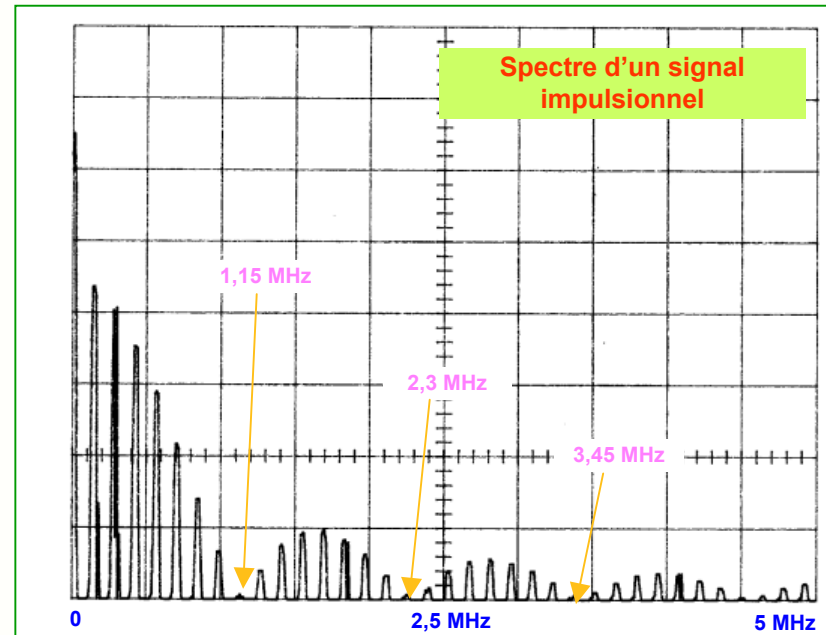
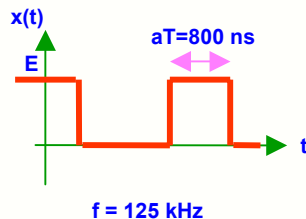
La courbe enveloppe des raies a pour équation :  $y = 2aE \frac{\sin(n\pi a)}{n\pi a}$

et passe par zéro pour n tel que :  $n\pi a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

soit pour des fréquences  $f_x$  telles que :  $f_x = \frac{1}{aT}, \frac{2}{aT}, \frac{3}{aT}, \dots$

### Exemple :

- spectre d'un train d'impulsions de fréquence 140 kHz et de largeur 870 ns
- l'enveloppe passe par zéro à 1/870ns=1,15 MHz, 2,3 MHz, 3,45 MHz ...
- le spectre est formé de raies à  $f = 140 \text{ kHz}, 280 \text{ kHz}, 420 \text{ kHz} \dots$



Applet : décomposition et synthèse d'une impulsion



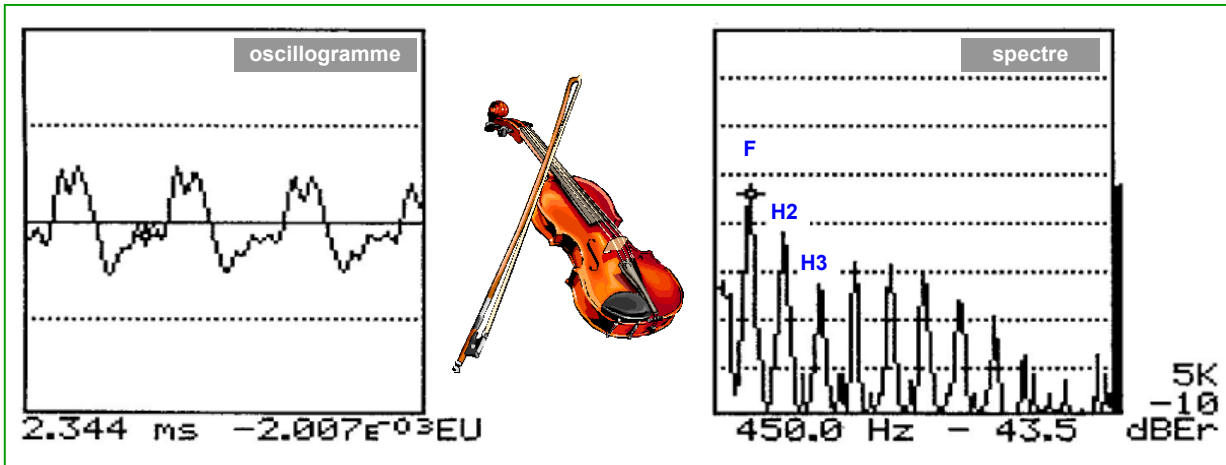


# 15- Harmoniques et timbre d'un son



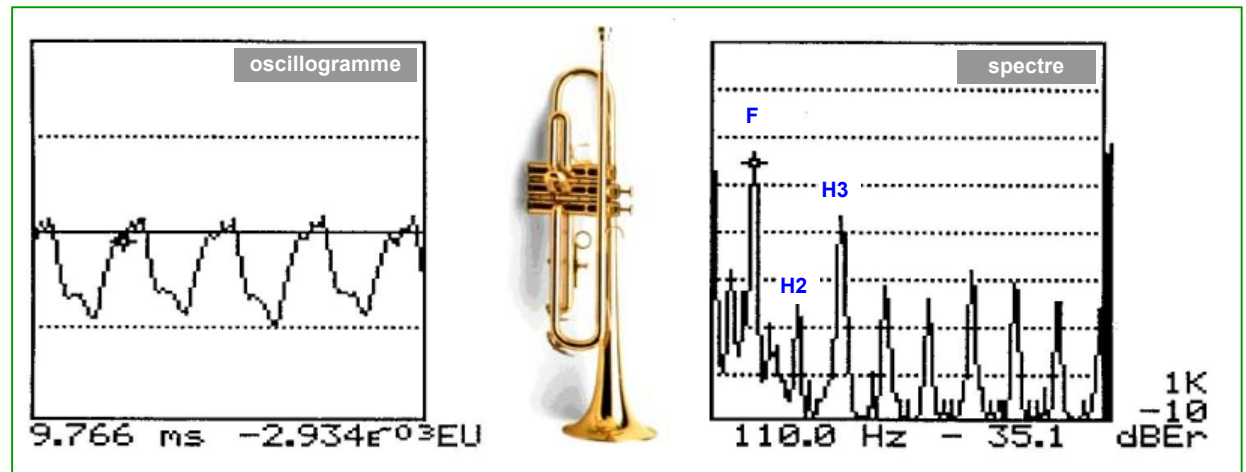
La répartition, l'amplitude et la durée des harmoniques définissent le **timbre** d'un instrument ou d'une voix :

- le son du violon diffère de celui de la trompette et de l'orgue parce que les trois sons ont une composition en harmoniques différente
- pendant toute la durée d'une note, l'allure temporelle et la composition harmoniques ne restent pas identiques
- ce sont ces **variations de niveau sonore** et de **composition harmonique** qui rendent la musique si vivante et si riche



Son d'un violon

Son d'une trompette



Vidéo : spectre d'un violoncelle



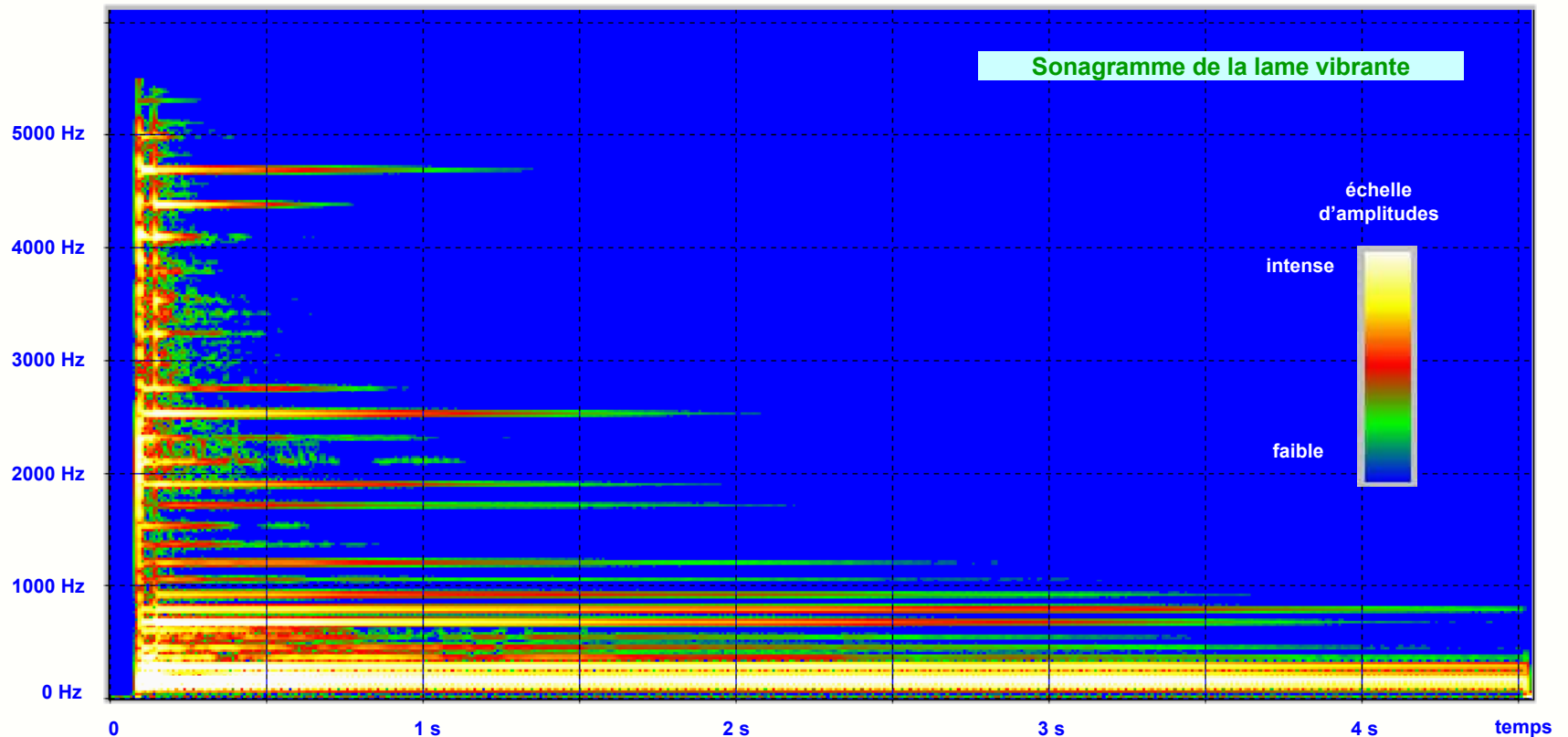
# 16- Evolution des harmoniques d'une lame vibrante



Une **lame métallique** frappée émet un son dont le timbre évolue au cours du temps :

- le bruit de l'impact est un bruit à large bande qui contient toutes les fréquences
- la vibration de la lame se fait selon différents modes qui correspondent à différents harmoniques
- ces harmoniques s'éteignent au bout d'un temps variable, ce qui fait évoluer le timbre du son
- la représentation de l'évolution des harmoniques en fonction du temps s'appelle un **sonagramme**

fréquence



**Son** : écouter le son de la lame vibrante



# 17- Mesure de la distorsion harmonique

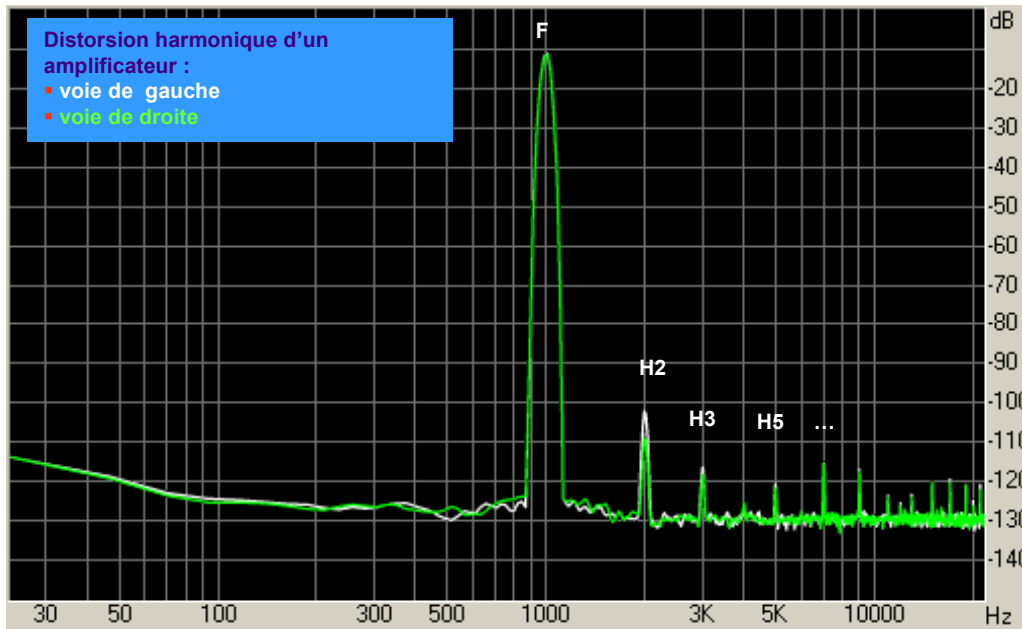


Cette mesure, couramment utilisée en électronique et en électrotechnique, nous renseigne sur :

- la qualité d'un oscillateur sinusoïdal (par analyse spectrale du signal produit par le dispositif)
- la linéarité d'un amplificateur (analyse spectrale de la sortie si l'entrée est sinusoïdale)
- la linéarité d'une charge alimentée par le réseau (analyse spectrale du courant si la tension est sinusoïdale)

## Exemple : test d'un ampli Hi-fi

- on applique sur l'entrée un signal à 1 kHz de niveau 1V
- le spectre en sortie montre l'apparition d'harmoniques
- ces harmoniques sont dans la bande audio et donc peuvent être audibles



### Amplitude des principales raies :

- F = 0 dB = 1V
- H2 = - 102 dB = 7,9 uV
- H3 = - 102 dB = 1,6 uV
- H5 = - 102 dB = 1 uV
- H7 = - 102 dB = 1,8 uV
- H9 = - 102 dB = 1,4 uV
- H13 = - 102 dB = 1 uV
- H14 = - 102 dB = 1 uV
- H16 = - 102 dB = 1 uV

Le taux de distorsion harmonique s'écrit :

$$t_d = \frac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2 + H_4^2 + \dots}}{F}$$

$$t_d = \frac{\sqrt{7,9^2 + 1,6^2 + 1^2 + \dots}}{10^6} = 8,6 \cdot 10^{-6} = 0,00086 \%$$

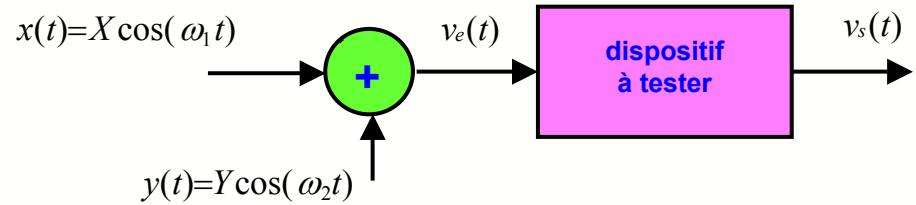
**Remarque :** ce taux de distorsion extrêmement faible est caractéristique d'un très bon amplificateur, mais il ne faut pas oublier qu'une très bonne enceinte acoustique a un taux de distorsion qui descend rarement en-dessous de 1% !



# 18- Mesure de la distorsion d'intermodulation



Pour tester la linéarité d'un dispositif (ampli, HP ...) on applique sur son entrée une somme de deux signaux sinusoïdaux de fréquence  $f_1$  et  $f_2$  :



▪ si le système est parfaitement linéaire :

$$v_s(t) = A \cdot v_e(t)$$

▪ pour un système réel, la caractéristique doit être modélisée par un polynôme :

$$v_s(t) = A \cdot v_e(t) + B \cdot v_e(t)^2 + C \cdot v_e(t)^3 + \dots$$

distorsion quadratique

distorsion cubique

Les distorsions quadratique, cubique et suivantes font apparaître de nouvelles fréquences en sortie de la forme :

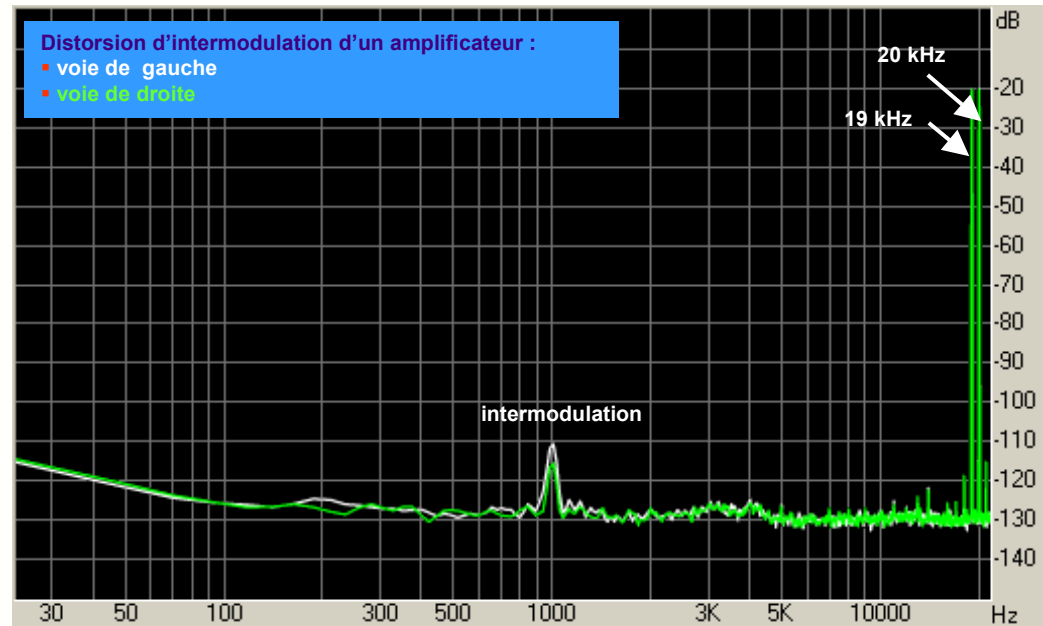
$$f_{m,n} = m \cdot f_1 \pm n \cdot f_2$$

## Exemple : test d'un ampli Hi-fi

- on applique sur l'entrée deux signaux à 19 kHz et 20 kHz
- leur amplitude est -20 dB sous 1V, soit  $X=Y=0,1V$
- la distorsion d'intermodulation crée du 1 kHz audible
- la distorsion (canal gauche) est de -110 dB soit 3,2 uV
- les autres produits d'intermodulation sont hors bande audio

Le taux de distorsion par intermodulation vaut :

$$t_{di} = \frac{D}{X} = 3,2 \cdot 10^{-5} = 0,0032\%$$



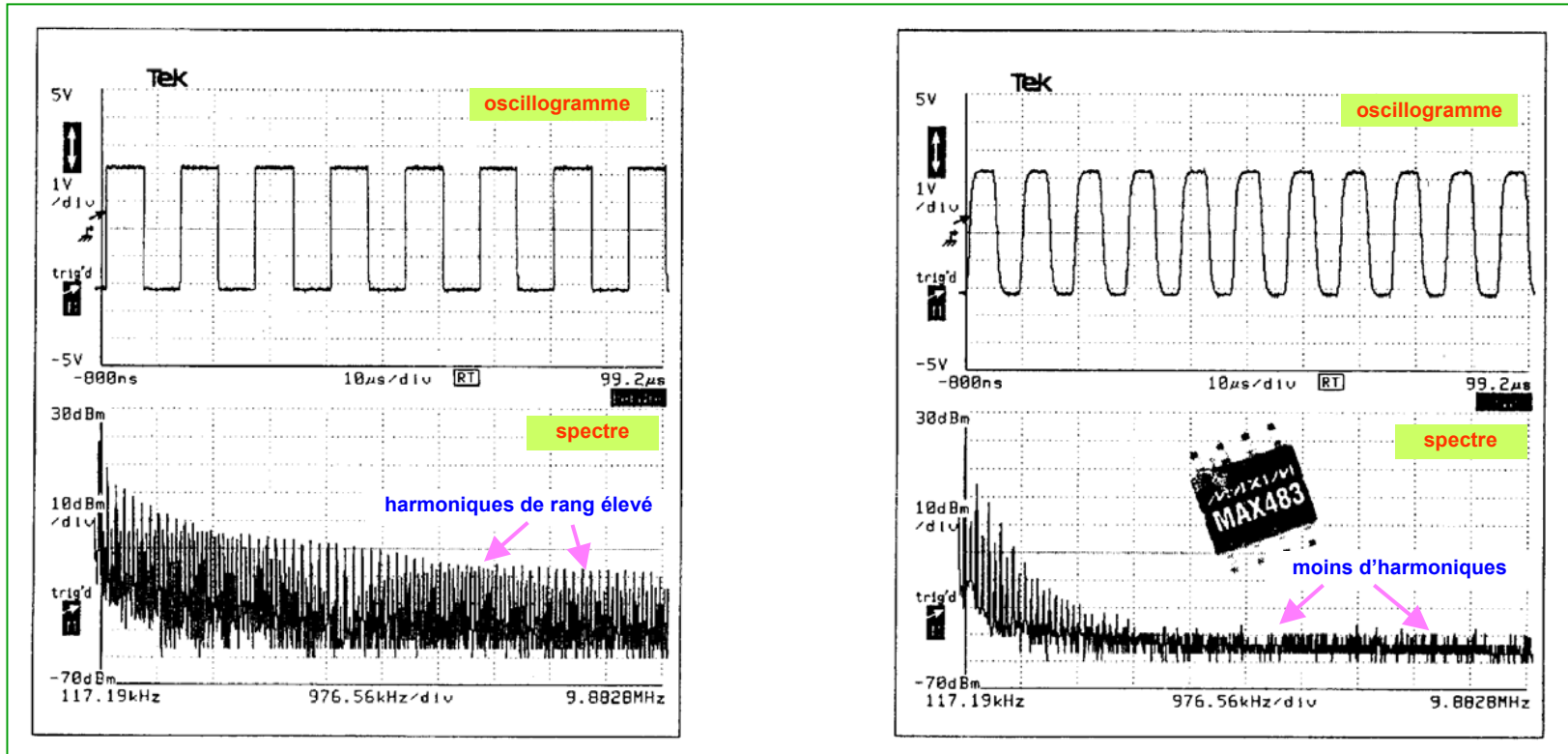
# 19- Réduction des rayonnements parasites



Dans les systèmes électroniques actuels, les signaux analogiques côtoient souvent les signaux numériques :

- les signaux numériques sont à fréquence élevée et à fronts raides, et leur **spectre est donc très large**
- les harmoniques de rang élevé sont facilement rayonnés car les **pistes** de circuit imprimé peuvent constituer de **bonnes antennes**
- cela se produit chaque fois que la longueur de la piste est voisine du quart de la longueur d'onde
- par exemple une piste de 10 cm constitue une excellente antenne pour l'harmonique 40 d'un signal à 10 MHz

Les constructeurs de circuits intégrés prennent actuellement en compte ce problème et proposent des **circuits intégrés qui dégradent volontairement les fronts** des signaux pour limiter l'amplitude des harmoniques de rang élevé.



Ces interfaces divisent les perturbations électromagnétiques par 100, par rapport à tous les autres circuits bipolaires et CMOS RS 485.

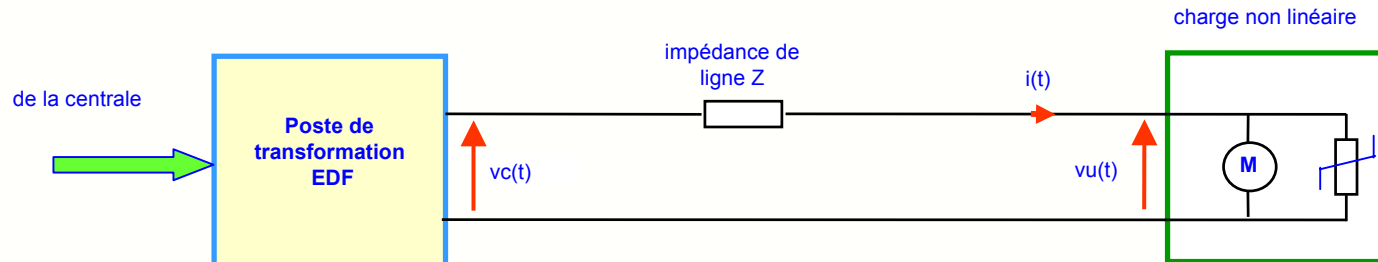
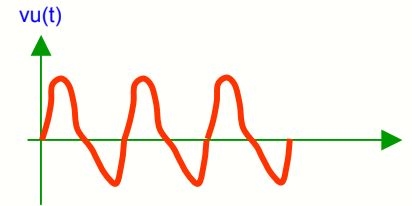
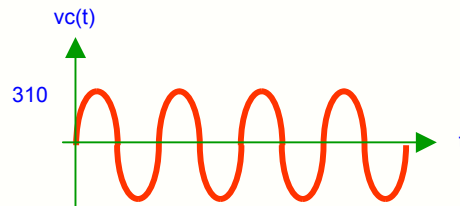


## 20- Les harmoniques sur le réseau 50 Hz



La tension disponible sur les prises de courants n'est pas toujours parfaitement sinusoïdale :

- lorsqu'une **charge linéaire** est connectée au réseau, le **courant  $i(t)$**  appelé dans la ligne est **sinusoïdal**
- exemples de charges linéaires : ampoules d'éclairage, radiateurs électriques ...
- si la **charge** est **non-linéaire**, le **courant  $i(t)$**  est **déformé** et peut même devenir impulsionnel, donc riche en harmoniques
- ces charges non-linéaires peuvent être diverses : alimentations classiques ou à découpage, ordinateurs, variateurs de vitesse pour moteurs, machines à souder à contrôle électronique, éclairages fluorescents etc ...



La ligne EDF entre le poste de transformation et l'utilisateur est caractérisée par son **impédance de ligne  $Z$**  :

- si la charge n'est pas linéaire, le courant n'est pas sinusoïdal et la chute de tension liée à l'impédance de ligne non plus
- la tension  $vu(t)$  disponible sur les prises de l'utilisateur n'est plus sinusoïdale
- les **harmoniques de la tension  $vu(t)$**  peuvent perturber le fonctionnement de certains appareils dès que la distorsion dépasse 5 %



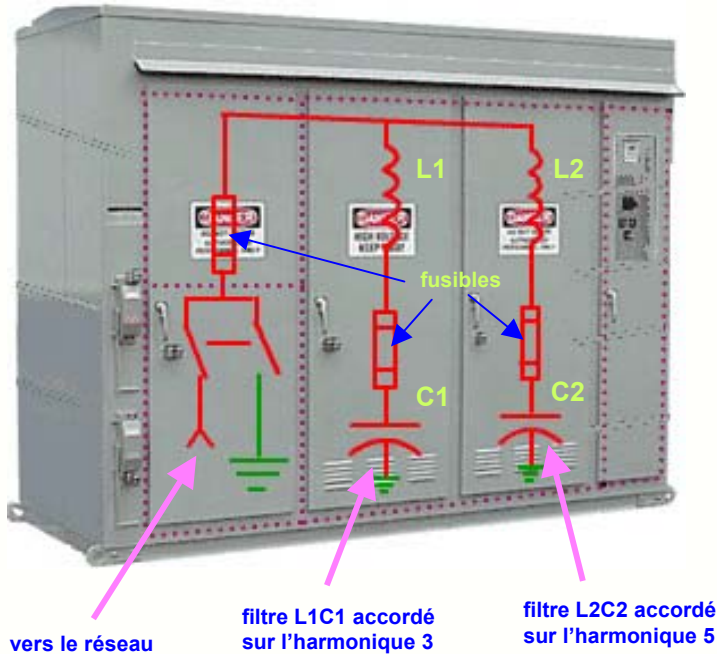
# 21 - Conséquences des harmoniques sur le réseau



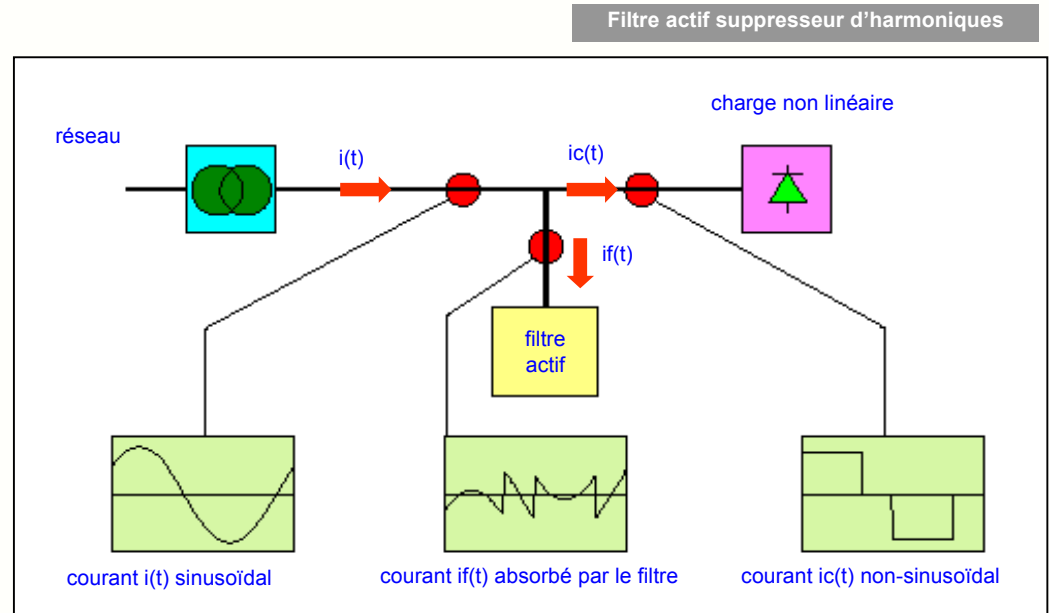
La présence d'harmoniques sur le réseau de distribution 50 Hz pose de nombreux problèmes :

- la présence d'harmoniques crée une **surchauffe** parce que la valeur efficace du courant est supérieure à celle indiquée par les ampèremètre usuels prévus pour une mesure en régime sinusoïdal
- la présence d'harmoniques 3 crée dans un système triphasé un **courant de neutre qui n'est plus nul**, il en résulte une surchauffe du fil de neutre qui ne véhicule normalement aucun courant si la charge est équilibrée
- la présence d'harmoniques 5 dans la tension d'alimentation d'un moteur asynchrone ou synchrone triphasé crée un **champ tournant en sens inverse**, donc une perte de couple pour le moteur et une surchauffe du rotor

La suppression des harmoniques nécessite quelquefois l'installation de **filtres passifs** ou **actifs** encombrants et coûteux :



Filtre passif suppresseur d'harmoniques



Vidéo : le problème des harmoniques sur le réseau



# 22- La transformée de Fourier



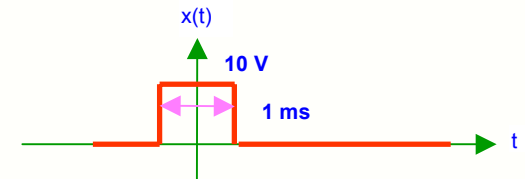
Le spectre  $S(f)$  d'un signal  $x(t)$  non périodique mais d'expression mathématique connue ( impulsion unique, salve de motifs simples... ) peut être calculé à l'aide de la transformée de Fourier :

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

avec  $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$

Cette transformation donne une fonction  $\underline{S}(j\omega)$  complexe dont on extrait le spectre en prenant le module  $S(\omega)$  en se limitant aux fréquences positives qui seules ont une signification physique.

**Exemple :** spectre d'une impulsion unique d'amplitude  $E = 10V$  et de largeur  $t_0 = 1 ms$  :



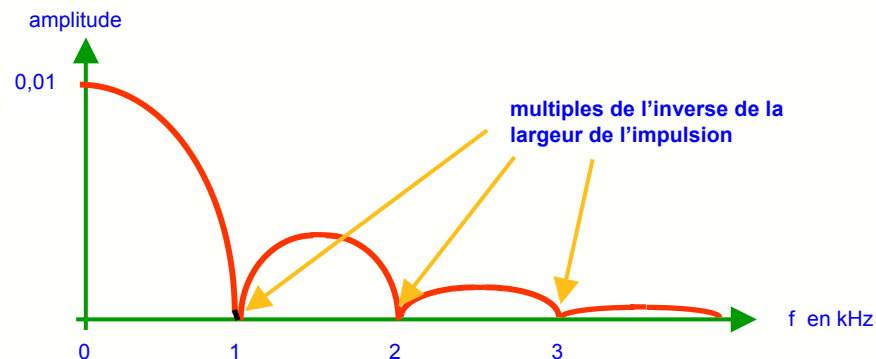
l'expression mathématique du signal  $x(t)$  est la suivante :

$$\begin{cases} x(t) = 10V & \text{si } -\frac{t_0}{2} < t < +\frac{t_0}{2} \\ x(t) = 0V & \text{en dehors de l'intervalle} \end{cases}$$

calcul de la transformée de Fourier :

$$\underline{S}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-t_0/2}^{+t_0/2} E[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)] dt = E \left[ \frac{\sin(\omega t)}{\omega} - j \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_{-t_0/2}^{+t_0/2} = E \cdot t_0 \frac{\sin(\pi f t_0)}{\pi f t_0}$$

le spectre est en  $\sin(X)/X$



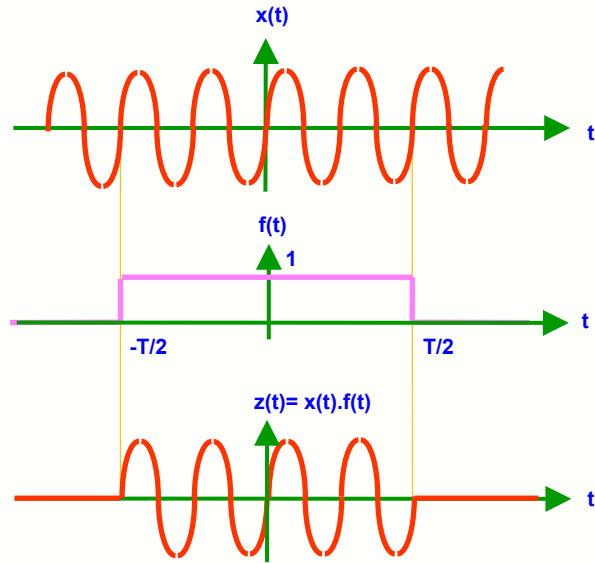




# 23- L'effet de fenêtre



Lorsqu'on travaille avec des **signaux de durée limitée**, le spectre est déformé : c'est **l'effet de fenêtre**. Pour observer cet effet, calculons le spectre d'un signal  $z(t)$  sinusoïdal de fréquence  $f_0$  et de durée  $T$  :



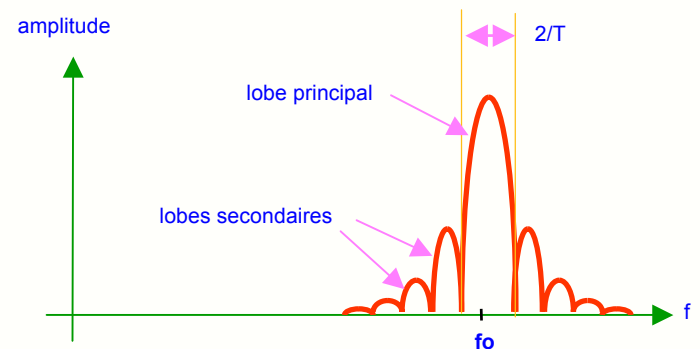
- le signal  $z(t)$  est le produit d'une fonction sinusoïdale  $x(t)$  et d'une fonction fenêtre  $f(t)$
- on dit qu'on observe le signal à travers une fenêtre temporelle rectangulaire de largeur  $T$
- la transformée de Fourier de  $z(t)$  se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \underline{S}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} E \sin(\omega_0 t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt \\ &= \frac{E}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} [\sin(\omega_0 + \omega)t + \sin(\omega_0 - \omega)t + j \cos(\omega_0 + \omega)t - j \cos(\omega_0 - \omega)t] dt \\ &= jE \frac{T}{2} \left[ \frac{\sin(\omega_0 + \omega)T/2}{(\omega_0 + \omega)T/2} - \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T/2}{(\omega_0 - \omega)T/2} \right] \end{aligned}$$

- si on se limite aux fréquences positives, le spectre  $S(f)$  s'écrit :

$$S(f) = E \frac{T}{2} \left[ \frac{\sin \pi(f_0 - f)T}{\pi(f_0 - f)T} \right]$$

- à cause de la durée limitée  $T$ , la raie à la fréquence  $f_0$  est devenue un lobe de largeur  $2/T$ , associé à des lobes secondaires
- plus la durée d'observation  $T$  est longue, plus le lobe principal s'affine et se rapproche d'une raie
- l'effet de fenêtre se manifeste dans tous les analyseurs numériques car ils calculent tous le spectre à partir d'une portion de signal limitée dans le temps

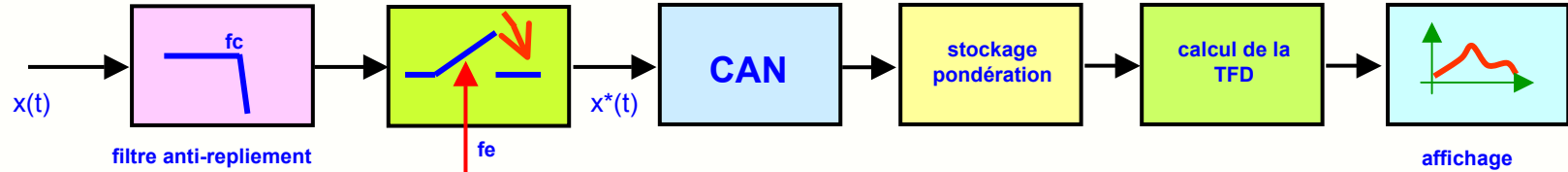




# 24- La transformée de Fourier discrète



Par échantillonnage et conversion analogique-numérique, il est facile de faire l'acquisition d'un signal  $x(t)$  par un ordinateur : l'application de la transformée de Fourier discrète ( c'est-à-dire discontinue) permet alors de calculer le spectre et de le visualiser :



- l'échantillonnage se fait à une fréquence  $f_e$  et la prise de  $N$  échantillons dure un temps  $T = N \cdot T_e = N/f_e$
- la durée  $T$  représente donc la largeur de la fenêtrage temporelle d'analyse
- à la fin de l'opération d'acquisition, on a en mémoire une série de  $N$  valeurs numériques  $x_0 = x(0), x_1 = x(T_e) \dots, x_n = x(nT_e) \dots$

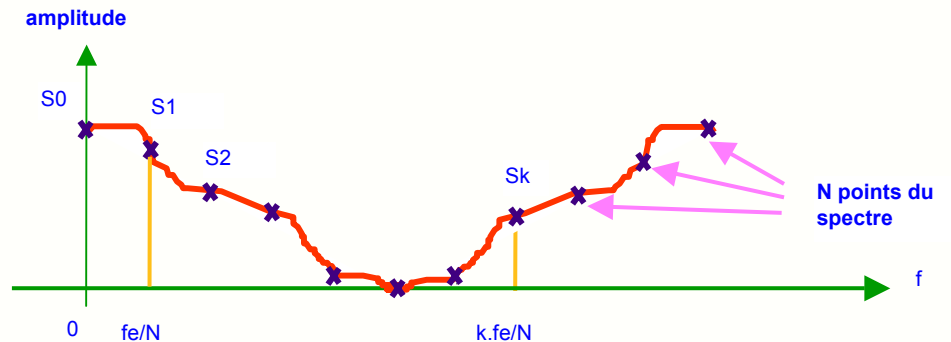
A partir de ces  $N$  échantillons, la TFD permet de calculer  $N$  points du spectre définis par leur abscisse  $f(k)$  et leur ordonnée  $S(k)$  :

▪ abscisse du point du spectre : 
$$f(k) = k \cdot \frac{f_e}{N}$$
 avec  $k = 0, 1, 2 \dots N-1$

▪ ordonnée du point du spectre : 
$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2jn\pi k/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2n\pi.k/N) - j\sin(2n\pi.k/N)]$$

### Remarques :

- la TFD nécessite de nombreux calculs
- pour 1024 points, il faut effectuer 1048576 additions et multiplications
- cela rend difficile le calcul en temps réel si  $f_e$  est élevée





# 25- Exemple d'application de la TFD



Le spectre du signal échantillonné a des caractéristiques particulières :

- le signal étant échantillonné, le spectre obtenu est forcément symétrique par rapport à  $f_e/2$ ,
- seule la première moitié  $N/2$  des points calculés sera donc effectivement utilisée pour tracer le spectre
- si on veut un spectre précis, il suffit d'augmenter le nombre de points du signal et donc la durée de l'échantillonnage  $T$
- le nombre de calculs et donc la durée du traitement mathématique augmente très vite avec le nombre  $N$  d'échantillons

**Exemple :** on dispose de  $N = 10$  échantillons du signal  $x(t)$  échantillonné à  $f_e = 1$  kHz allant de  $x_0$  à  $x_9$

**1er calcul :  $k = 0$**       fréquence  $f(0) = 0$       amplitude :  $S(0) = \frac{1}{10}[x(0)+x(1)+x(2)+...+x(9)] = X_{moyen}$

On retrouve le résultat bien connu que la composante spectrale à la fréquence nulle correspond à la valeur moyenne du signal

**2ème calcul :  $k = 1$**       fréquence  $f(1) = f_e/N = 100$  Hz

amplitude :  $S(1) = \frac{1}{10}\{x(0)[\cos(2.0.\pi.1/10) - j\sin(2.0.\pi.1/10)] + x(1)[\cos(2.1.\pi.1/10) - j\sin(2.1.\pi.1/10)] + \dots + x(9)[\cos(2.9.\pi.1/10) - j\sin(2.9.\pi.1/10)]\}$

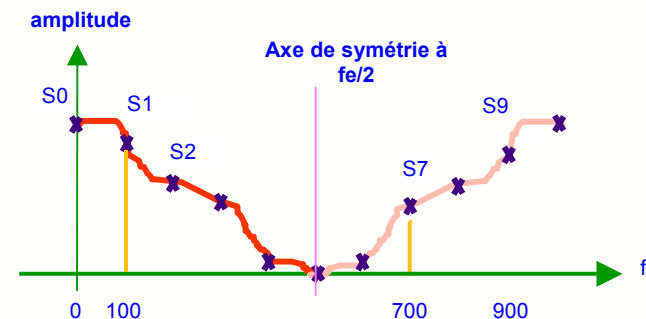
...

**10ème calcul :  $k = 9$**       fréquence  $f(9) = 9.f_e/N = 900$  Hz

amplitude :  $S(9) = \frac{1}{10}\{x(0)[\cos(2.0.\pi.9/10) - j\sin(2.0.\pi.9/10)] + x(1)[\cos(2.1.\pi.9/10) - j\sin(2.1.\pi.9/10)] + \dots + x(9)[\cos(2.9.\pi.9/10) - j\sin(2.9.\pi.9/10)]\}$

### Conclusions :

- à partir des 10 échantillons du signal on peut calculer sans difficultés particulières 10 point du spectre
- le calcul de chaque point nécessite 10 multiplications et additions
- le calcul de la TFD sur 10 échantillons nécessite donc 100 opérations
- de la même façon, le calcul d'une TFD sur 1024 échantillons nécessite 1048576 opérations de multiplication et d'addition





# 26- La transformée de Fourier rapide ou FFT



Le calcul d'une TFD, nécessite une grande quantité d'opérations et devient est très long si le nombre d'échantillons est élevé :

- il existe une façon de calculer la même chose autrement, c'est l'**algorithme de Transformée de Fourier Rapide**
- cet algorithme a été publié en 1965 **James Cooley** (IBM) et **John Tukey** (Bell Labs)
- il repose sur une façon particulière de calculer la TFD qui économise certaines opérations et accélère donc le calcul

Cet algorithme nécessite que le nombre N d'échantillons soit un multiple de 2 et son principe est le suivant :

▪ pour la TFD, **un point du spectre** se calcule par :

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2jn\pi k/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk} \quad \text{avec} \quad W = e^{-2j\pi/N}$$

$N^2$  opérations

- si on sépare les échantillons en **échantillons pairs p(n)** et **impairs i(n)**, on peut écrire :

$$S(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} p(n) W^{nk} + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} i(n) W^{nk} e^{-2jnk}$$

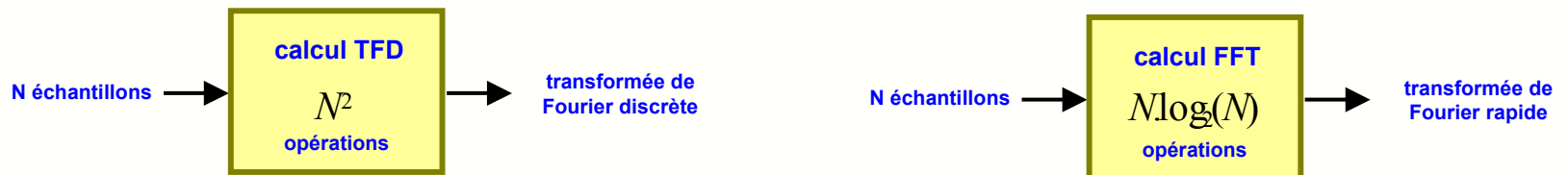
$\left(\frac{N}{2}\right)^2$  opérations       $\left(\frac{N}{2}\right)^2$  opérations

Grâce à cette opération, le nombre de calculs pour un point du spectre est passé de :

$N^2$       à       $2 \cdot \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$

Il a donc été **divisé par 2**

Le processus est répété sur chacun des deux calculs précédents, et ainsi de suite, jusqu'au calcul de TFD sur 2 échantillons. Le gain en nombre de calculs et donc en temps est impressionnant ( facteur supérieur à 100 pour N = 4096 ).



Pour fixer les idées, un PC actuel équipé d'un Pentium 4 à 2GHz est capable d'effectuer une FFT sur 2048 points en moins de 0,1 ms.

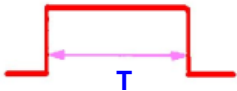
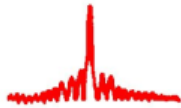

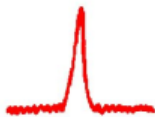

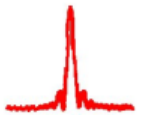

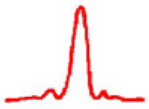
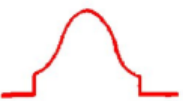
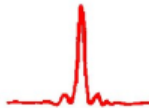
**Applet : calcul de la FFT d'un signal**



## 27- Les fenêtres de pondération



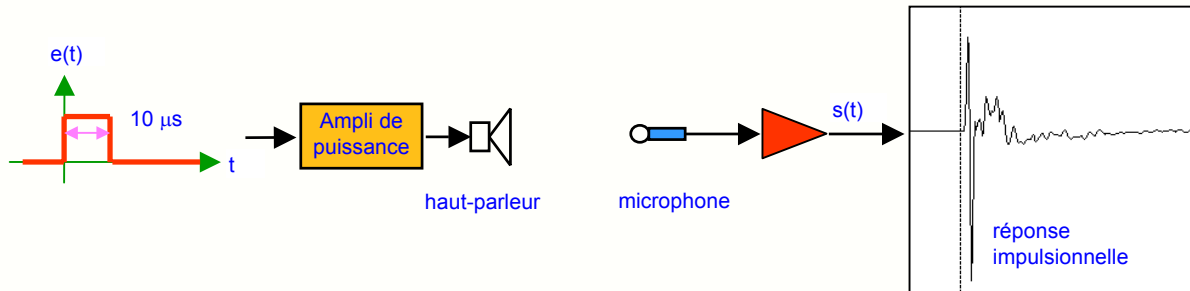
Une raie est transformée en lobe à cause de la durée d'observation limitée à travers la fenêtre temporelle  $T$ . En choisissant d'autres types de fenêtres, c'est-à-dire **en pondérant les échantillons avant le calcul de la FFT**, on peut donc agir sur la forme du spectre et en particulier diminuer l'amplitude des lobes secondaires.

Type	Forme	Équation	Allure de la raie	Écart lobe principal / 1er lobe secondaire/	Largeur à - 3 dB en Hz	Largeur de bruit en Hz	Pente d'atténuation des lobes secondaires
Rectangulaire		$F(t)=1$		-13,2 dB	$0,88/T$	$1/T$	6 db/oct
Demi-sinus		$F(t)=\sin(\pi\frac{t}{T})$		-22,4 dB	$1,15/T$	$1,26/T$	12 db/oct
Barlett		$t>0 \quad F(t)=2\frac{t}{T}$ $t<0 \quad F(t)=2-2\frac{t}{T}$		-26,6 dB	$1,28/T$	$1,33/T$	12 db/oct
Hann		$F(t)=0,5+0,5.\cos(\pi\frac{t}{T})$		-31,6 dB	$1,39/T$	$1,5/T$	18 db/oct
Hamming		$F(t)=0,54+0,46.\cos(\pi\frac{t}{T})$		-43,9 dB	$1,26/T$	$1,36/T$	6db/oct (au delà de $5/T$ )

## 28- Application : le test d'un haut-parleur



L'observation de la **réponse impulsionnelle** d'un système et de son spectre nous donne des renseignements très intéressants sur ses propriétés électromécaniques.

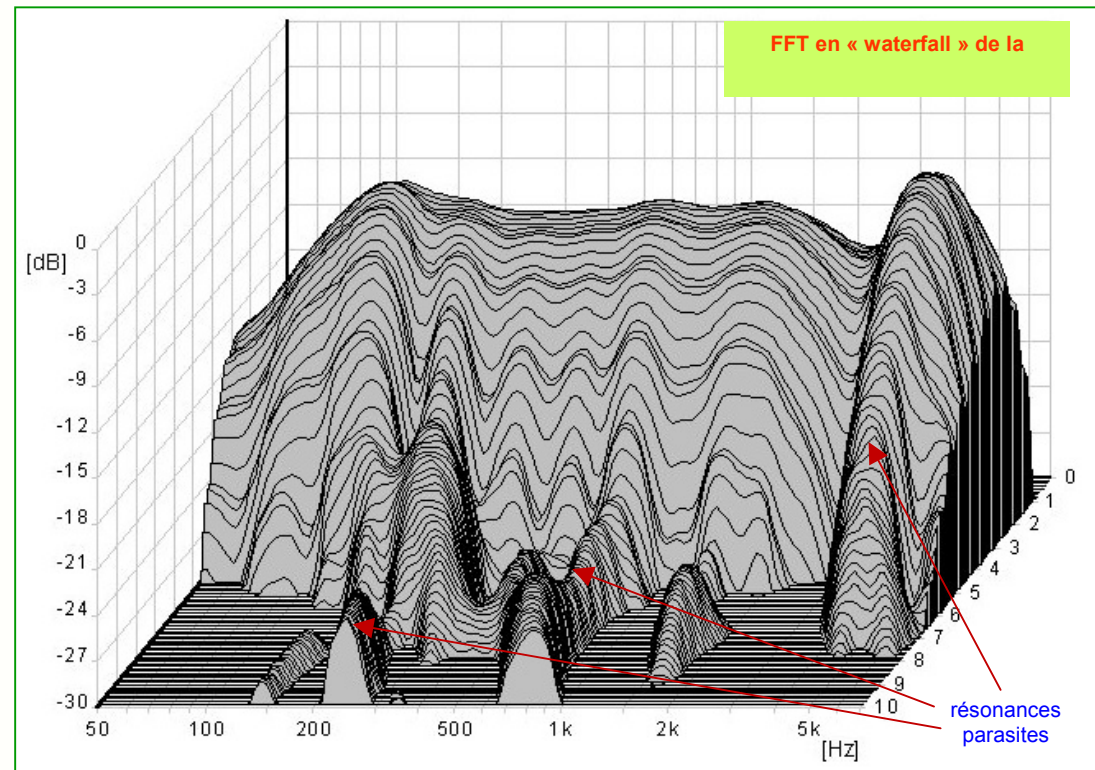


Pour tester un **haut-parleur** ou une **enceinte acoustique** :

- on l'excite par une impulsion très fine  $e(t)$
- le spectre de  $e(t)$  est presque plat entre 0 et 20 kHz
- par un microphone, on enregistre sa réponse  $s(t)$
- un analyseur FFT affiche l'évolution du spectre  $S(f)$
- le graphique obtenu s'appelle « waterfall »

### Remarques :

- le premier spectre correspond à la **courbe de réponse de Bode** du haut-parleur
- les arêtes de la courbe en « waterfall » correspondent aux **résonances parasites** du haut-parleur
- un bon haut-parleur présente peu d'arêtes et une courbe « waterfall » qui tombe très vite à 0



## 29- Application : la FFT dans le domaine médical

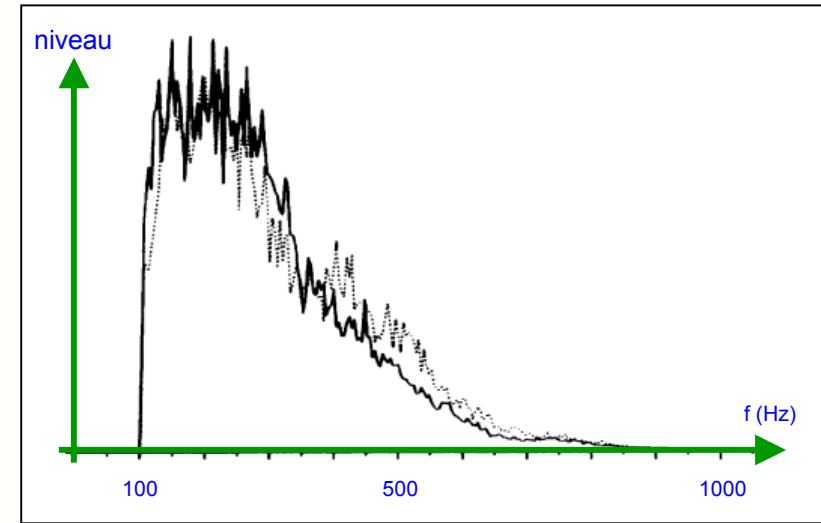


L'allure temporelle des signaux biologiques ( ECG, EEG ...) est souvent difficile à l'interpréter et le calcul du spectre par FFT après échantillonnage apporte des résultats intéressants au praticien :

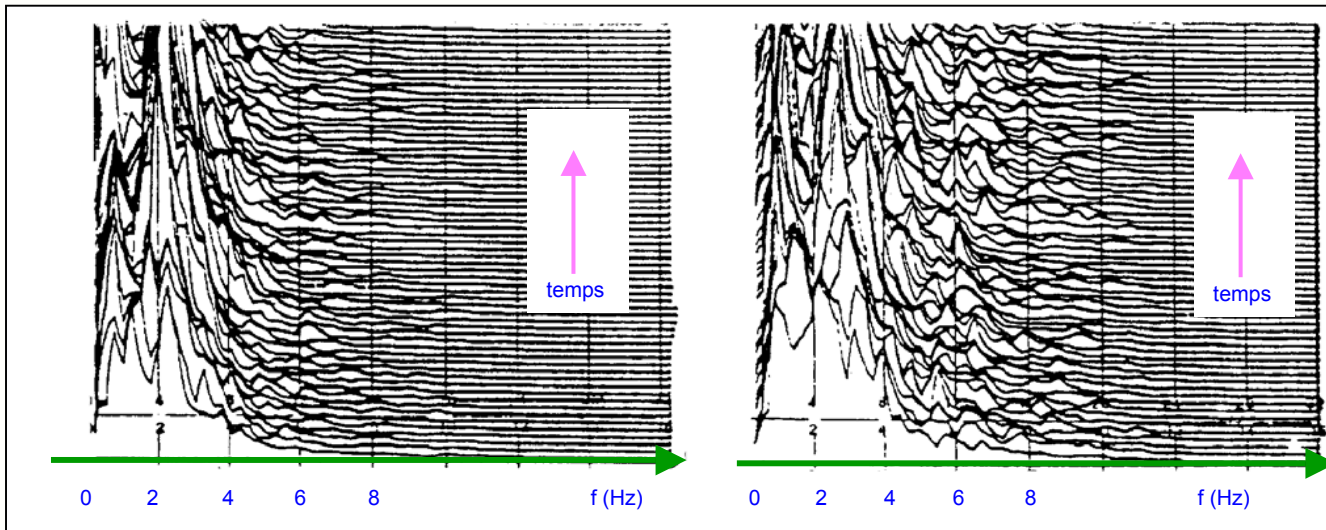
### Exemple 1 : étude sur le spectre du bruit respiratoire à l'expiration

- bruit respiratoire capté par un microphone
- calcul de la FFT et tracé du spectre
- spectre d'un **non-fumeur** en trait plein
- spectre d'un **fumeur** en pointillé

On distingue bien l'augmentation des fréquences aiguës liées à une détérioration de la paroi de la trachée et des bronches.



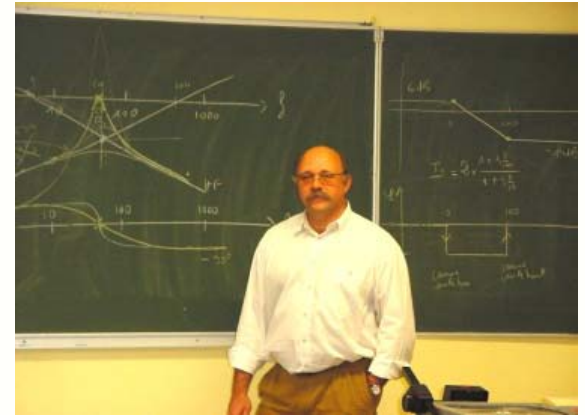
### Exemple 2 : spectre de l'électroencéphalogramme



- l'étude spectrale des EEG fournit de indications sur les dysfonctionnement du cerveau
- elle permet aussi de suivre le processus de **guérison** de façon atraumatique
- l'enregistrement concerne un homme de 73 ans 2 jours après une **hémiplegie** côté gauche
- dans l'hémisphère touché, le maximum du spectre a été abaissé de 3 Hz à 2 Hz



Coucher de soleil sur Étretat



# FIN