

# Module :

## réponse d'un système linéaire



▶ Diaporamas (2) : diagrammes de Bode, réponse

▶ Résumé de cours

- 1- Caractérisation d'un système physique
  - 2- Calcul de la réponse pour une entrée donnée
  - 3- Stabilité d'un système linéaire
  - 4- Systèmes passe-bas
  - 5- Réponse d'un passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre
  - 6- Réponse d'un passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre
  - 7- Les « pôles dominants » d'un système
- Annexe : influence de  $m$  sur le temps de réponse et le dépassement

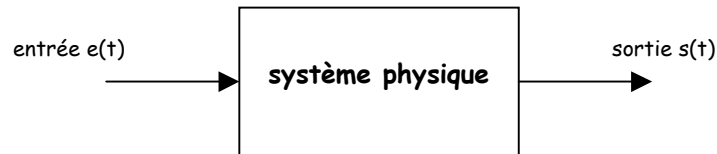
▶ Exercices

Caractérisation d'un système  
Pôles et zéros d'une transmittance  
Stabilité d'un système linéaire  
Réponse d'un système du premier ordre  
Réponse d'un système du second ordre  
Pôles dominants  
Réponse d'un système d'ordre élevé  
Modélisation d'un moteur à courant continu

▶ Questionnaire : la réponse d'un système linéaire en questions

## 1) Caractérisation d'un système physique :

Un système physique quelconque ( électronique, électromécanique, pneumatique ...) produit une sortie  $s(t)$  lorsqu'il est excité par un signal d'entrée  $e(t)$ .



On se limite dans ce cours aux **systèmes linéaires**, les systèmes étudiés ne comportent donc aucune non-linéarité comme : saturation des amplificateurs, dispositif à seuil (trigger, relais ...), seuil de démarrage pour les moteurs ...

Il y a plusieurs façon des caractériser un système physique linéaire et de décrire sa réponse :

- par sa réponse  $s(t)$  à une entrée  $e(t)$  de forme donnée ( impulsion, échelon, rampe ...)

- par son diagramme de Bode ou sa transmittance complexe :  $\underline{T}(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)}$

- par l'équation différentielle qui relie les grandeurs d'entrée et de sortie :

$$s(t) = K.e(t) + K_1 e'(t) + K_2 e''(t) + \dots + L_1 s'(t) + L_2 s''(t) + \dots$$

- par sa transmittance de Laplace  $T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

- par la représentation des pôles et des zéros de  $T(p)$  dans le plan complexe (diagramme des pôles et zéros)

**Remarque 1 :** passage de l'équation différentielle à  $T(p)$  et  $\underline{T}(j\omega)$

On passe facilement de l'un à l'autre en se souvenant qu'une dérivation par rapport au temps se traduit par une multiplication par  $j\omega$  en complexe et par  $p$  en Laplace :

$$v(t) \quad \xrightarrow{\quad} \quad \underline{V}(j\omega) \quad \xrightarrow{\quad} \quad V(p)$$

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \xrightarrow{\quad} \quad j\omega \cdot \underline{V}(j\omega) \quad \xrightarrow{\quad} \quad p \cdot V(p)$$

**Remarque 2 :** pôles et zéros

Le numérateur et le dénominateur de  $T(p)$  peuvent se factoriser :

$$T(p) = K \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m)}$$

Les racines  $z_i$  du numérateur :

- sont réelles ou complexes conjuguées
- s'appellent des zéros

Les racines  $p_i$  du dénominateur :

- sont réelles ou complexes conjuguées
- s'appellent des pôles

La transmittance du système est entièrement déterminée par la constante  $K$ , les zéros  $z_i$  et les pôles  $p_i$ .

## 2) Calcul de la réponse pour une entrée donnée :

⇒ pour une **entrée sinusoïdale**

Le module et l'argument de la transmittance complexe permettent de caractériser la sortie :

$$\text{si } e(t) = E \cos(\omega_0 t) \quad \text{alors } s(t) = TE \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec } T : \text{ module de } \underline{T}(j\omega_0)$$

$$\varphi : \text{ argument de } \underline{T}(j\omega_0)$$

⇒ pour une **entrée de forme quelconque** ( échelon, rampe etc ... )

L'expression de la sortie s(t) pour une entrée e(t) se trouve de la manière suivante :

- calculer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t)
- calculer S(p) = E(p).T(p)
- en appliquant la transformée de Laplace inverse, calculer s(t) à partir de S(p)

Par définition, la transformée de Laplace F(p) d'une fonction f(t) s'écrit :  $F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt} dt$

Propriétés de la transformée de Laplace		
linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(p)+b.F_2(p)$
dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
translation dans le temps	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
translation en p	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
Transformée de signaux simples		
échelon	$f(t) = U(t)$	$\frac{1}{p}$
impulsion de Dirac	$f(t) = \delta(t)$	1
rampe	$f(t) = at$	$\frac{a}{p^2}$
exponentielle	$f(t) = e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$

- théorème de la valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
- théorème de la valeur initiale :  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$

**Remarque :** on travaille toujours avec des signaux d'entrée nuls avant  $t = 0$  , et avec un système initialement au repos .

### 3) Stabilité d'un système linéaire

Pour voir si le système linéaire défini par  $T(p)$  est stable, on lui applique une perturbation (impulsion par exemple) et on observe l'évolution de  $s(t)$  :

- si  $s(t)$  retourne à la valeur 0, on dira que le système est stable
- si  $s(t)$  augmente indéfiniment, le système est instable

Dans ce cas, la transformée de Laplace de la tension de sortie s'écrit, puisque  $E(p) = 1$  :

$$S(p) = T(p)E(p) = T(p)$$

Sachant que la transmittance  $T(p)$  a :

- des pôles réels  $p_1, p_2, p_3 \dots$
- des pôles complexes conjugués  $m_1 \pm jn_1, m_2 \pm jn_2 \dots$

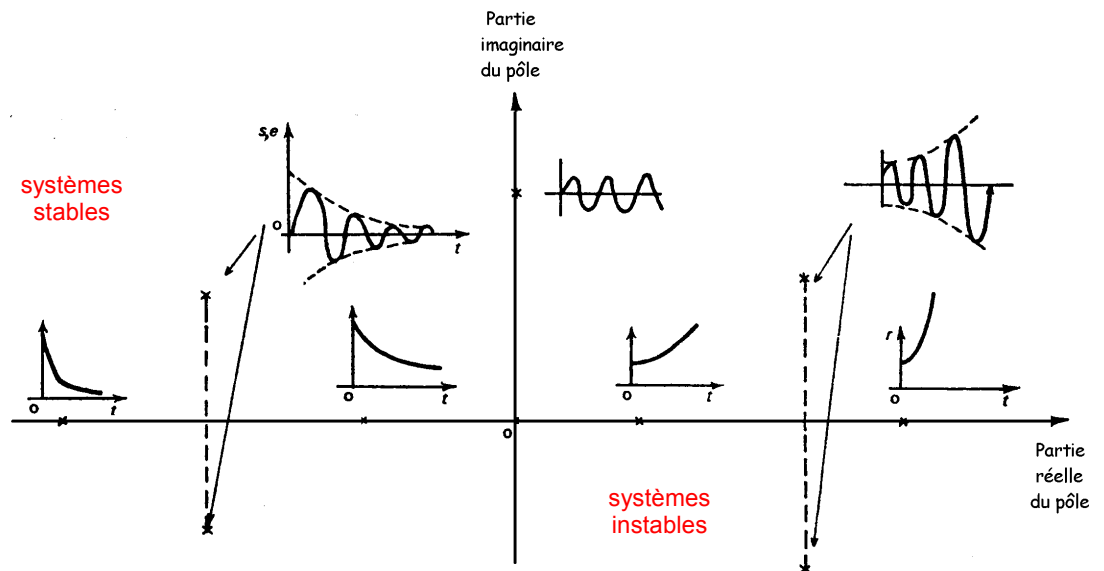
on montre que la sortie s'écrit :

$$s(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + 2L_1 e^{m_1 t} \cos(n_1 t) + \dots$$

Pour que la sortie revienne à 0, il faut donc que tous les termes exponentiels soient décroissant, soit :

$$p_1 \text{ et } p_2 \text{ et } p_3 \dots \text{ et } m_1 \text{ et } m_2 \dots < 0$$

**Critère de stabilité** : Un système est stable si sa transmittance  $T(p)$  n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe.



**Remarque** : suffit d'un pôle à partie réelle positive pour rendre un système instable

**Conséquence** : pour prévoir à l'avance la stabilité ou l'instabilité d'un système, il suffit de regarder où se trouvent ses pôles dans le plan complexe.

#### 4) Systèmes passe-bas :

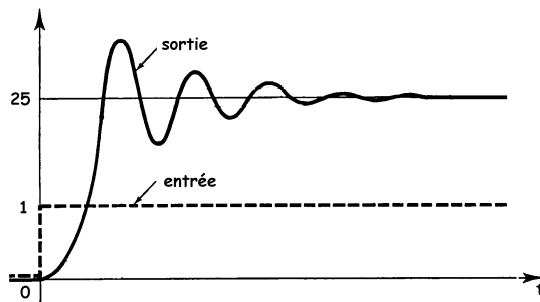
En dehors des filtres passe-haut, la plupart des systèmes rencontrés dans la pratique ne « suivent » plus aux fréquences élevées, pour des raisons simples à comprendre :

- les composants actifs (transistor, AOp) ont toujours une fréquence maximale de fonctionnement
- l'inertie des pièces en mouvement empêche les systèmes mécaniques, électromécaniques ou pneumatiques de suivre aux fréquences élevées

L'étude des systèmes passe-bas a donc une grande importance, parce qu'ils sont les plus courants.

⇒ la réponse indicielle (échelon) montre une **amplification en continu**

Si on applique à leur entrée un échelon, la sortie se stabilise à un niveau différent de 0 une fois que le régime transitoire est terminé.

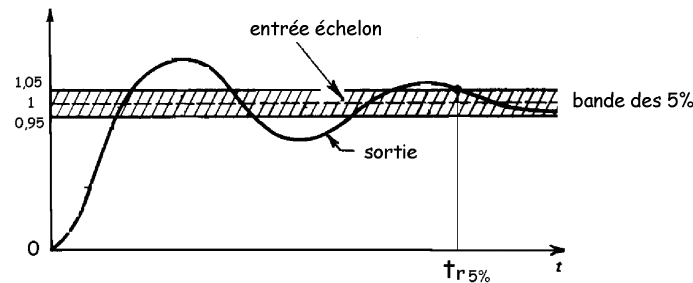


pour ce système, une entrée  $E = 1$  donne une sortie  $S = 25$ , soit une amplification en continu :

$$A_0 = S/E = 25$$

⇒ la réponse indicielle montre un **régime transitoire**

La montée vers la valeur finale est plus ou moins rapide selon le système, et la durée du régime transitoire est en général caractérisée par le temps de réponse à 5%.



$tr_{5\%}$  d'un système = temps que met la réponse indicielle pour entrer dans la bande des  $\pm 5\%$  et ne plus en ressortir

⇒ les diagrammes de Bode et de Nyquist montrent une **chute du gain aux fréquences élevées**

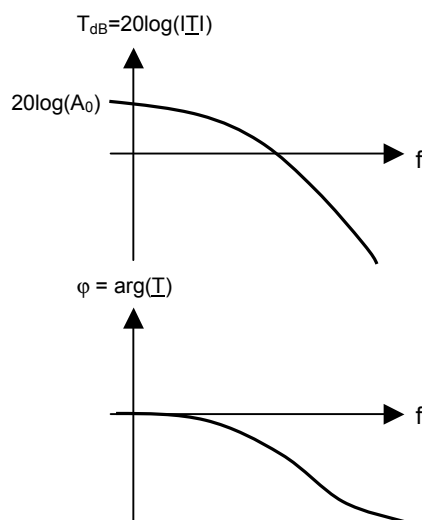


Diagramme de Bode d'un passe-bas

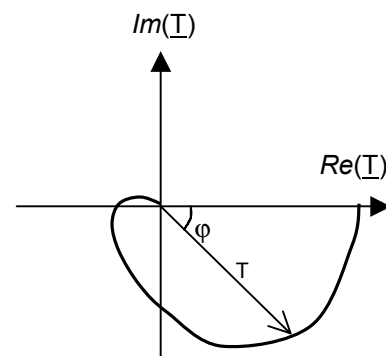


Diagramme de Nyquist d'un passe-bas

### 5) Réponse d'un passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre :

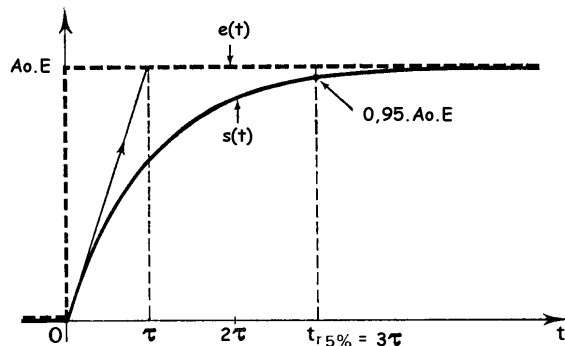
La transmittance de Laplace d'un tel système se met sous la forme « standard » :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \quad \text{avec}$$

- une amplification statique  $A_0$
- une constante de temps  $\tau$
- un seul pôle réel négatif  $p_0 = -1/\tau$

⇒ la réponse à un échelon d'amplitude  $E$  s'écrit :

$$s(t) = A_0 E (1 - e^{-t/\tau})$$

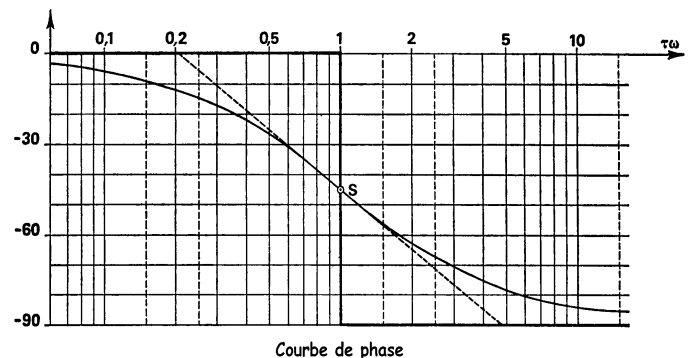
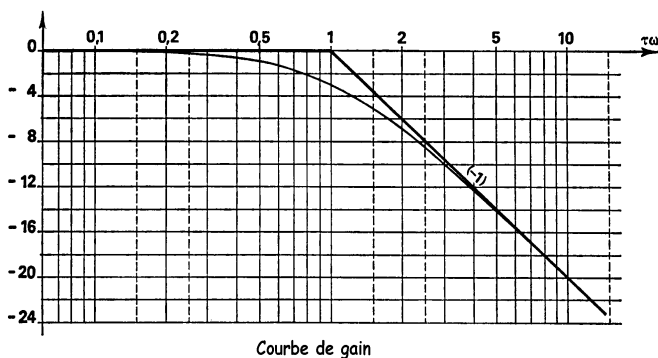


- la tangente à l'origine coupe la valeur finale à  $t = \tau$
- à  $t = \tau$ , la courbe est à 63% de la valeur finale
- le temps de réponse à 5% vaut  $3\tau$

⇒ la transmittance complexe s'écrit facilement sous une forme standard classique :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec une pulsation de coupure } \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

⇒ le diagramme de Bode a l'allure classique suivante :



- gain statique  $G_0 = 20 \log(A_0)$
- cassure à la pulsation  $\omega_0$
- pente de  $-20 \text{ dB/dec}$  après la cassure
- déphasage nul aux basses-fréquences
- rotation de phase de  $-90^\circ$  à la pulsation  $\omega_0$

## 6) Réponse d'un passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre :

La transmittance de Laplace d'un tel système se met sous la forme « standard » :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec}$$

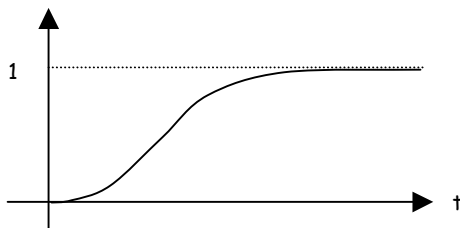
- une amplification statique  $A_0$
- un amortissement  $m$
- une pulsation propre  $\omega_0$

Le seul calcul à faire est la mise de la transmittance sous la forme standard pour trouver  $A_0$ ,  $m$  et  $\omega_0$ .

Suivant la valeur de l'amortissement  $m$ , on distingue 3 cas :

⇒  $m > 1$ , la transmittance a deux pôles réels  $p_1$  et  $p_2$

$$T(p) = \frac{A_0}{\left(1 - \frac{p}{P_1}\right)\left(1 - \frac{p}{P_2}\right)}$$

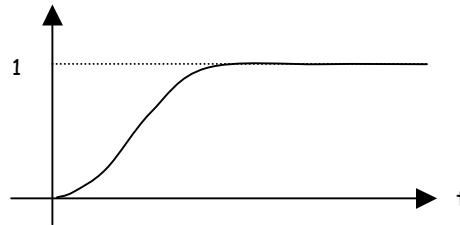


▪ réponse à un échelon lente et sans dépassement

▪ si  $m \gg 1$  alors  $t_{r,5\%} = \frac{3mT_0}{\pi}$

⇒  $m = 1$ , la transmittance a un pôle double  $p_0$

$$T(p) = \frac{A_0}{\left(1 - \frac{p}{P_0}\right)^2}$$

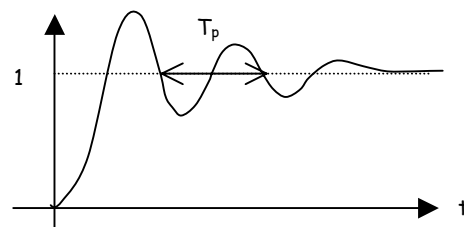


▪ réponse à un échelon plus rapide, toujours pas de dépassement

▪ temps de réponse  $t_{r,5\%} = 0,75.T_0$

⇒  $m < 1$ , la transmittance a deux pôles complexes conjugués  $p_1$  et  $p_2$

La transmittance ne peut pas se factoriser, le diagramme de Bode présente une cassure double à  $\omega_0$ .



▪ réponse à un échelon rapide, avec dépassement

▪ amplitudes des dépassements et temps de réponse donnés par les abaques

▪ pseudo-période  $T_p = \frac{T_0}{\sqrt{1 - m^2}}$

Deux valeurs de  $m$  très utiles :

- si  $m = 0,7$  on a  $D = 4\%$ , le temps de réponse est minimal et vaut  $t_{r,5\%} = 0,45.T_0$
- si  $m = 0,43$  on a  $D = 20\%$ , le temps de réponse vaut  $t_{r,5\%} = 0,85.T_0$

C'est le cas le plus intéressant en pratique, car il correspond à des réponses satisfaisantes.

## 7) Les « pôles dominants » d'un système :

Un système du  $n^{\text{ème}}$  ordre a  $n$  pôles et sa réponse à une impulsion ou à un échelon comprend donc un certain nombre de termes correspondants aux pôles réels et aux paires de pôles complexes conjugués.

**Exemple :** le système de transmittance

$$T(p) = \frac{1}{(1+p)\left(1+\frac{p}{6}\right)\left(1+\frac{p}{22}\right)}$$

a 3 pôles réels négatifs :  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -6$  et  $p_3 = -22$ , et une amplification statique  $A_0 = 1$ .

Sa réponse  $S(p)$  à un échelon  $E(p) = 1/p$  s'écrit :

$$S(p) = \frac{1}{p(1+p)\left(1+\frac{p}{6}\right)\left(1+\frac{p}{22}\right)} = \frac{1}{p} - \frac{1,257}{p+1} + \frac{0,275}{p+6} - \frac{0,017}{p+22}$$

ce qui correspond à un signal de sortie :

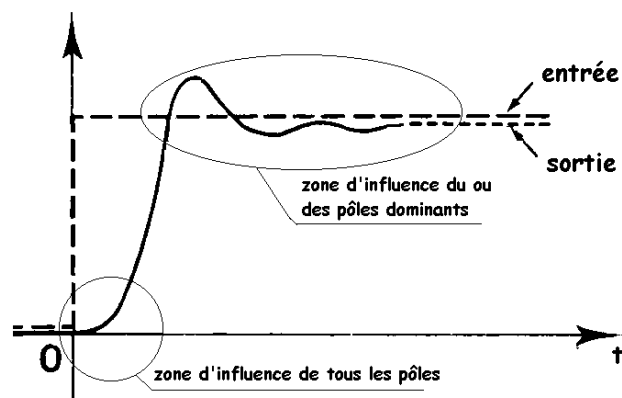
$$s(t) = 1 - 1,257e^{-t} + 0,275e^{-6t} - 0,017e^{-22t}$$

Lorsque le temps s'écoule, ces termes s'éteignent les uns après les autres, les pôles les plus petits correspondant aux termes qui durent le plus longtemps. Ces pôles sont les pôles dominants.

On peut vérifier que le système du 3<sup>ème</sup> ordre précédent a un comportement transitoire très voisin d'un système du 1<sup>er</sup> ordre qui n'aurait qu'un seul pôle dominant  $p_1 = -1$  et le même  $A_0$  :

$$s(t) = 1 - 1 \cdot e^{-t}$$

La forme de la réponse d'un système dépend donc essentiellement des pôles dominants qui sont les pôles les plus proches de 0.



**Remarques :**

- un système d'ordre élevé a, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un système du 1<sup>er</sup> ou du 2<sup>ème</sup> ordre
- on peut simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants ( en veillant à conserver le gain statique du système ! )
- un pôle peut être négliger dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent
- négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées

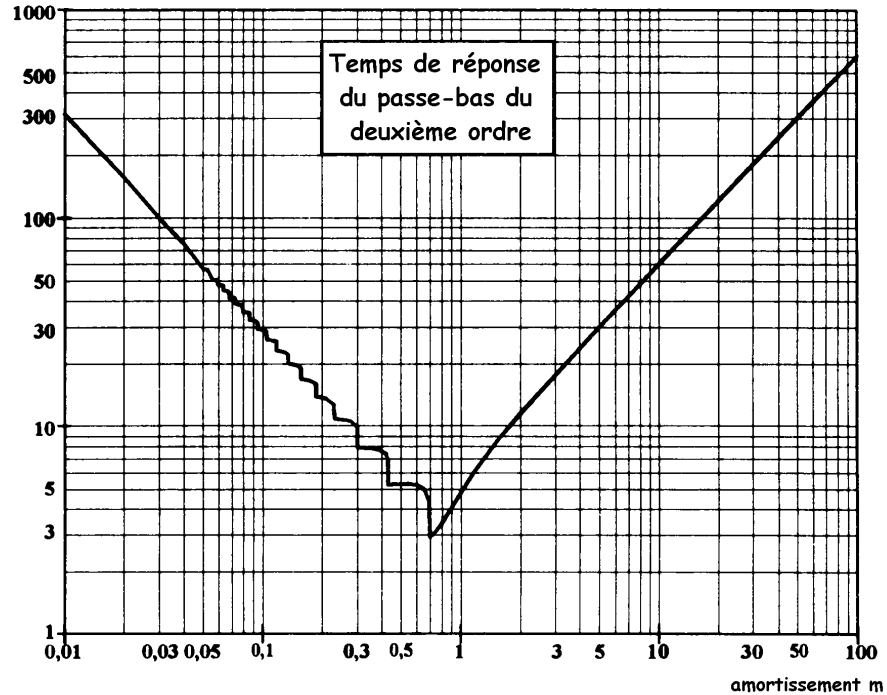


## Annexe : influence de $m$ sur le temps de réponse et le dépassement

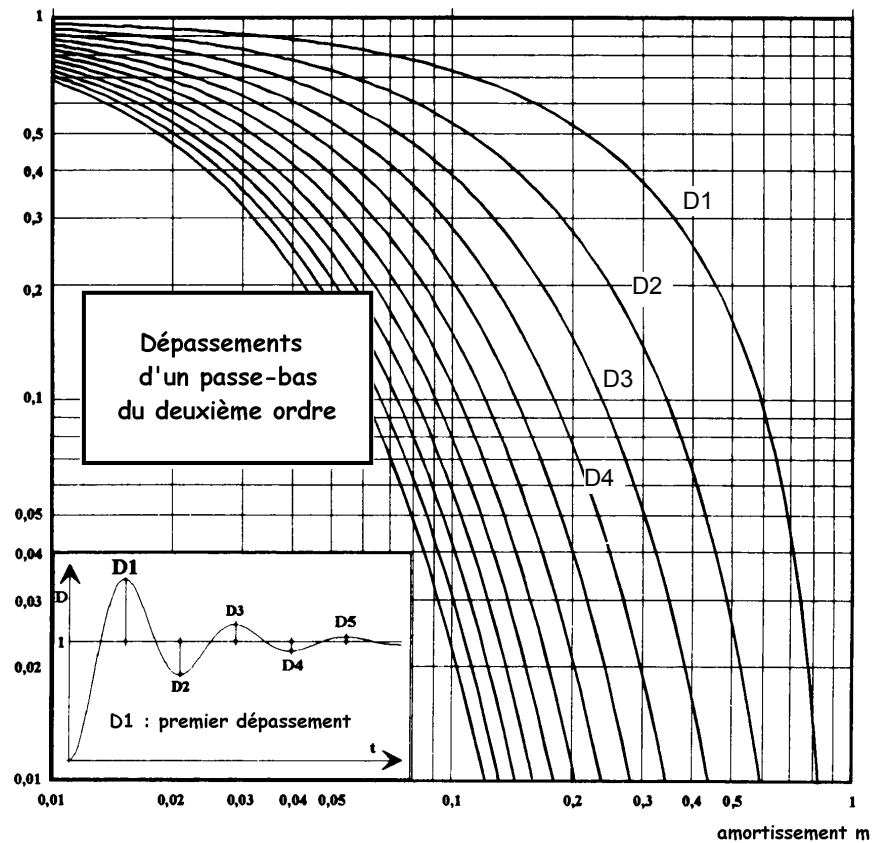
Pour une valeur d'amortissement  $m$ , lire le temps de réponse réduit  $\tau_r \omega_0$  et diviser cette valeur par la pulsation propre pour obtenir le **temps de réponse à 5%** du système.

L'abaque « dépassements » permet de lire directement l'amplitude relative des différents **maxima** du régime transitoire.

temps de réponse réduit  $\tau_r \omega_0$



dépassement



# Exercices d'application



jean-philippe muller

## REP01 - Caractérisation d'un système



Savoir naviguer entre les différentes expressions mathématiques décrivant les propriétés d'un système linéaire

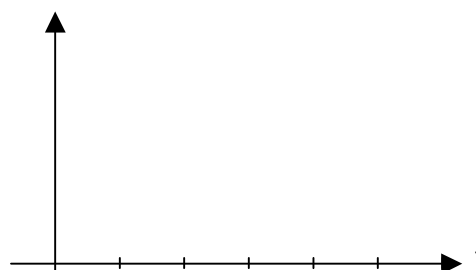
Un système est caractérisé par la transmittance :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{40}{2 + j\omega}$$

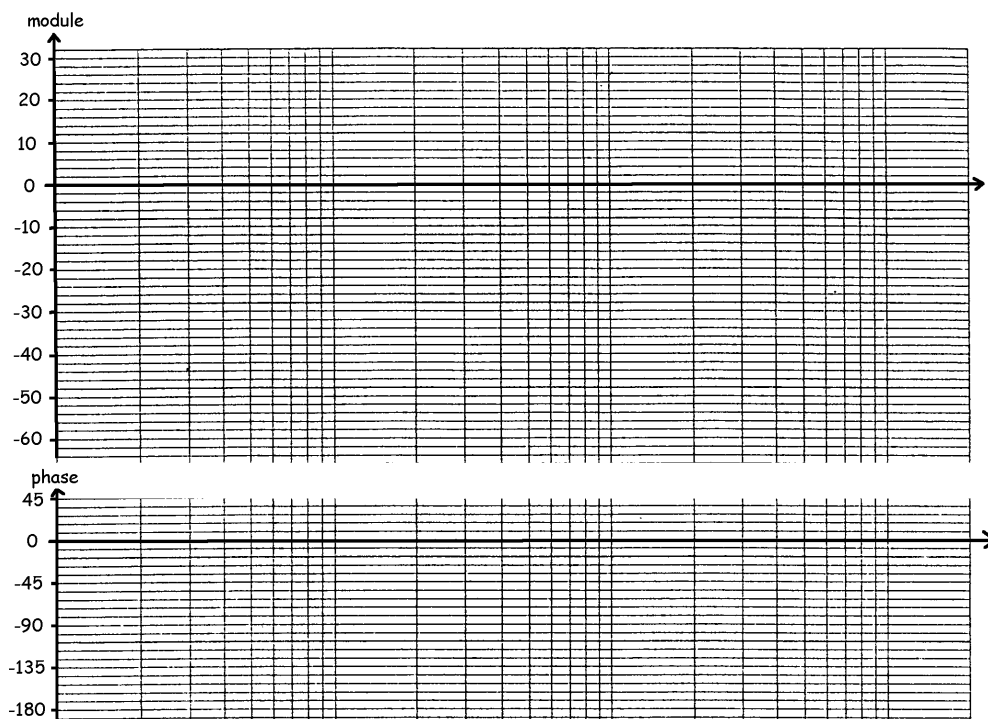
1) Quelle est l'équation différentielle liant l'entrée  $e(t)$  et la sortie  $s(t)$  ?

2) Quelle est l'expression de la réponse  $s(t)$  à un signal d'entrée sinusoïdal  $e(t) = 2\sin(10t)$  ?

3) Etablir l'expression de sa réponse à un échelon d'amplitude 10, tracer la réponse et donner le temps de réponse à 5% du système.



4) Tracer le diagramme de Bode de  $T(j\omega)$ .



## REPO2- Pôles et zéros d'une transmittance

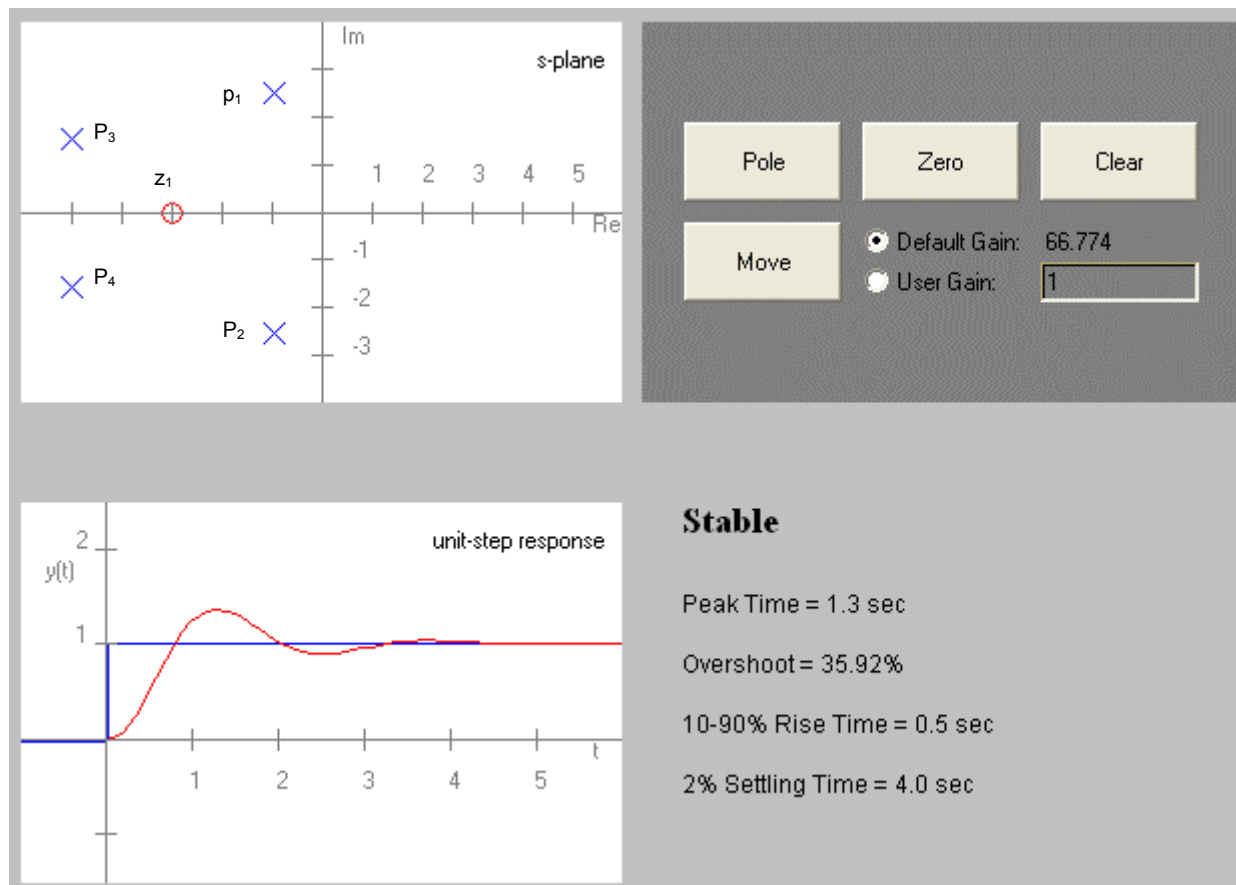


Comprendre la relation entre pôles/zéros et transmittance

Un système de transmittance  $H(p)$  est caractérisé par les pôles et zéros suivants :

$x$  = pôle

$o$  = zéro



1) Déterminer graphiquement les valeurs numériques des pôles et du zéro.

$p_1 =$

$p_2 =$

$p_3 =$

$p_4 =$

$z =$

2) A partir de la réponse à un échelon, déterminer la transmittance statique du système  $H_0 =$

3) En déduire l'expression mathématique de la transmittance  $T(p)$ .

4) Estimer le temps de réponse à 5% du système :  $tr_{5\%} =$

5) Quel est l'ordre de ce système ?

## REPO3- Stabilité d'un système linéaire



Savoir prévoir la stabilité d'un système linéaire

A- Etudier la stabilité des systèmes suivants :

$$T_1(p) = \frac{1}{2+5p}$$

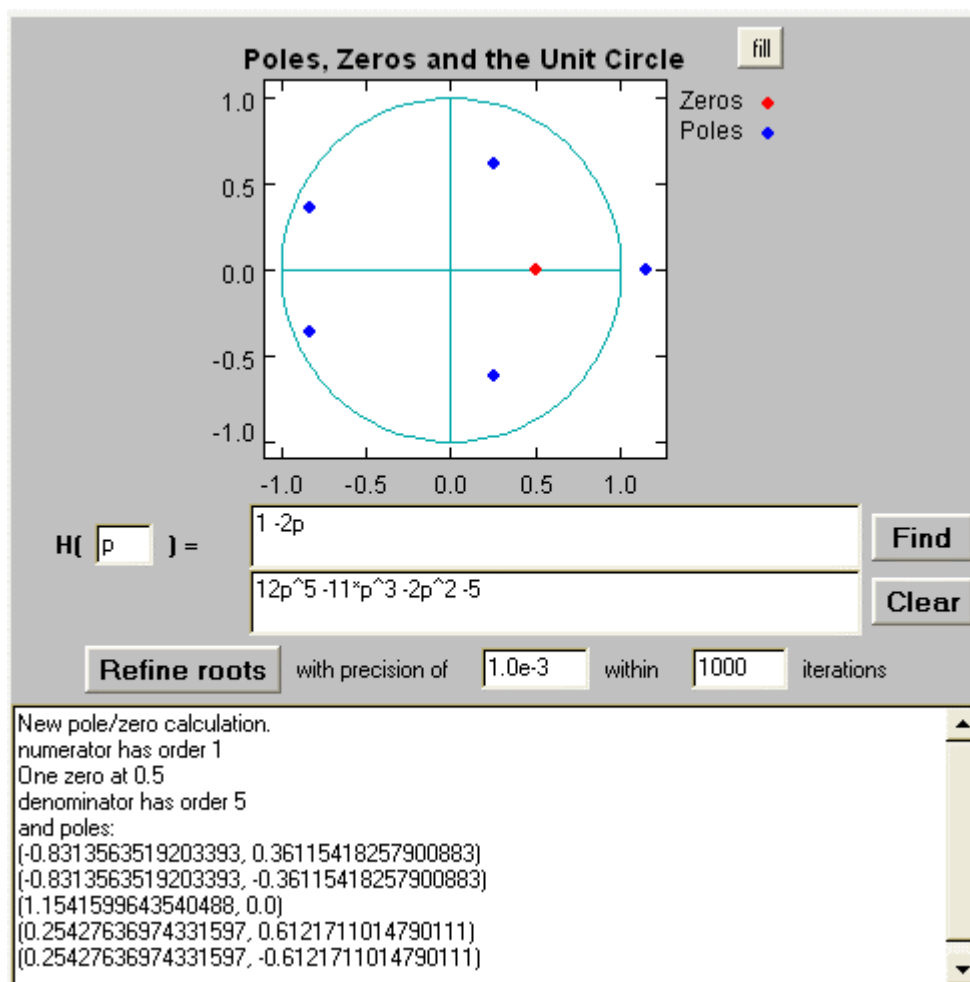
$$T_2(p) = \frac{12p}{5-10p}$$

$$T_3(p) = \frac{10}{p(p+3)(p-2)}$$

$$T_4(p) = \frac{2}{p^2-4p+4}$$

$$T_5(p) = \frac{12}{p^2-2p+2}$$

B- Un système est défini par sa transmittance H(p) dont les pôles et les zéros ont été calculés par un logiciel adapté :



1) Quel est l'ordre de ce système ?

2) Les pôles et zéro sont :

 $p_1 =$  $p_2 =$  $p_3 =$  $p_4 =$  $p_5 =$  $z =$ 

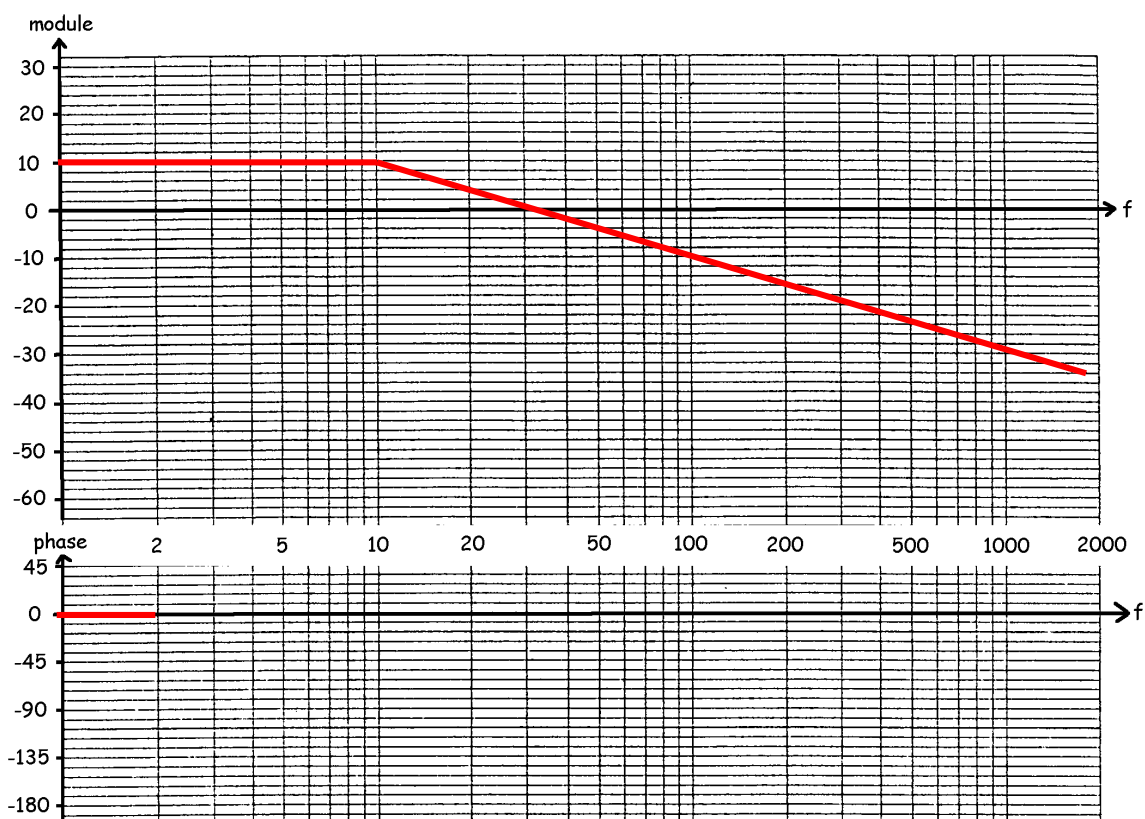
3) Ce système est-il stable ou instable ? pourquoi ?

## REP04- Réponse d'un système du premier ordre

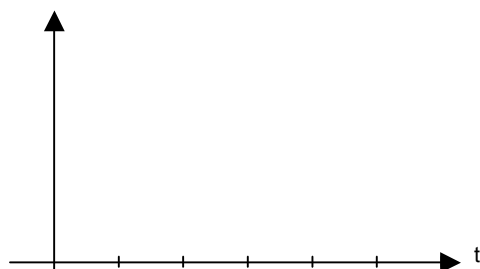


Savoir caractériser avec le minimum de calculs la réponse d'un système

Un système  $H(p)$  est caractérisé par la courbe de gain asymptotique suivante :



- 1) Déterminer l'ordre du système, sa transmittance en continu  $H_0$  et compléter la courbe de phase.
- 2) En déduire l'expression de la transmittance de Laplace du système  $H(p) =$
- 3) Que vaut la constante de temps  $\tau$  de ce système ?
- 4) Donner l'expression mathématique de la réponse du système à un échelon d'amplitude  $E = 10$  et tracer son allure.



- 5) Quel est le temps de réponse à 5 % de ce système ? le temps de réponse de 10 à 90 % ?

## REPO5- Réponse d'un système du second ordre



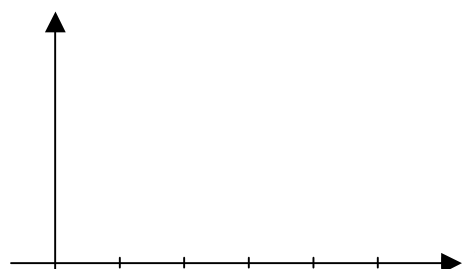
Savoir caractériser avec le minimum de calculs la réponse d'un système

On étudie un système du second ordre dont la transmittance s'écrit :

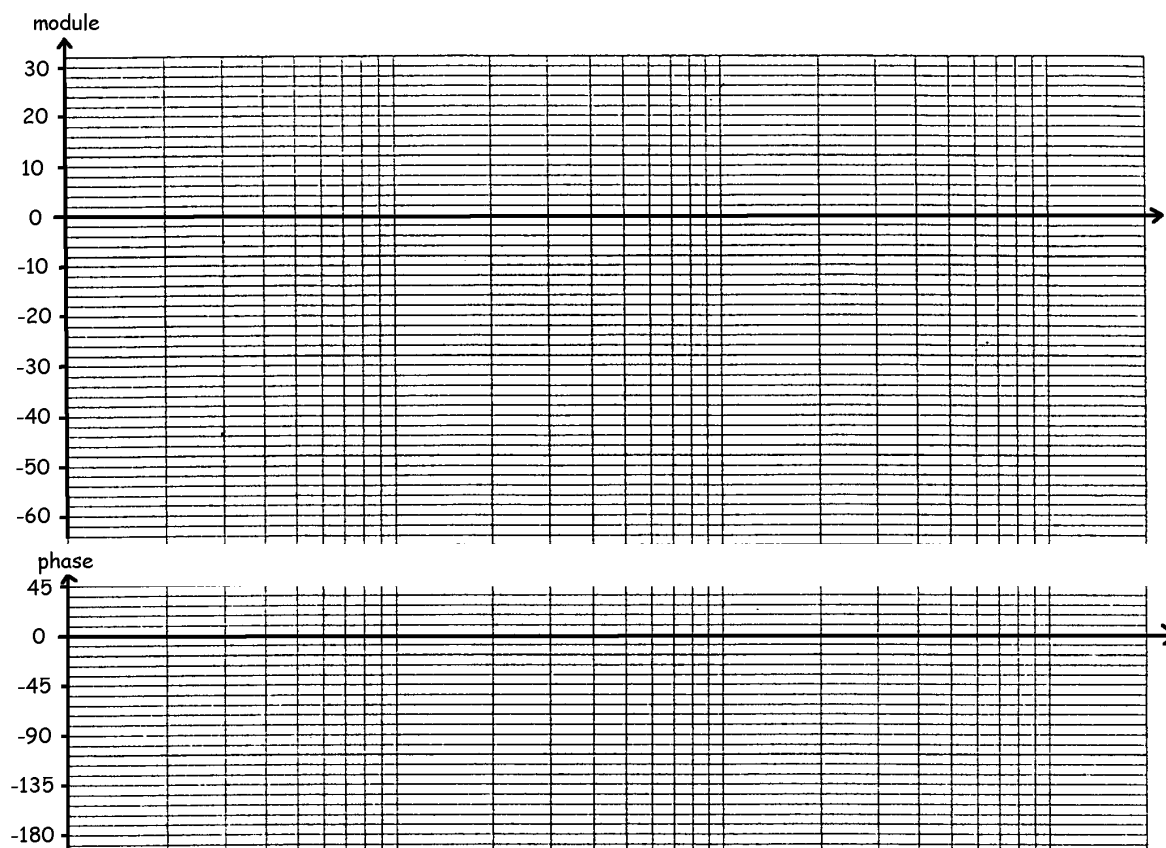
$$H(p) = \frac{200}{100 + 10p + p^2}$$

1) Déterminer les valeurs de la transmittance en continu  $H_0$ , de la pulsation propre et de l'amortissement.

2) Tracer avec le minimum de calculs l'allure de sa réponse indicielle et évaluer son temps de réponse à 5%.



3) Dessiner l'allure de son diagramme de Bode







## REP07- Réponse indicielle d'un système d'ordre élevé

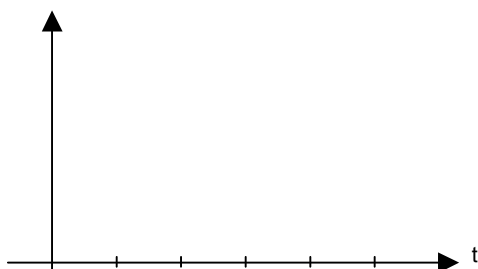


Savoir caractériser avec le minimum de calculs la réponse d'un système

On étudie un système du second ordre dont la transmittance s'écrit :

$$H(p) = \frac{1024000}{102400 + 1440p + 21,64p^2 + 0,105p^3 + 0,0001p^4}$$

- 1) Calculer la valeur de la transmittance en continu  $H_0$  .
  
- 2) A l'aide du logiciel de calcul des pôles et zéros ( diapo 3), déterminer les valeurs des pôles (dans les valeurs numériques, la virgule doit être remplacée par un point !)
  
- 3) En conservant uniquement le ou les pôles dominants, donner une expression simplifiée de la transmittance.
  
- 4) Calculer la pulsation propre et l'amortissement de ce système simplifié.
  
- 5) Tracer avec le minimum de calculs l'allure de sa réponse indicielle et évaluer son temps de réponse à 5%.



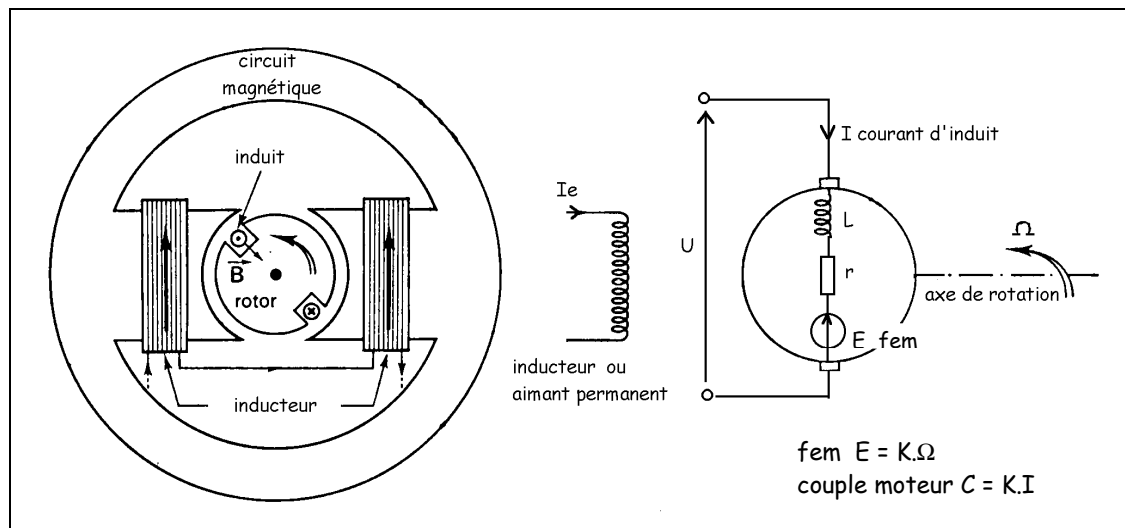
## REPO8- Modélisation d'un moteur à courant continu



Savoir écrire les équations du moteur et déterminer sa transmittance

On étudie un moteur à courant continu dont on néglige les frottements et les pertes autres que les pertes par effet Joule. Le champ magnétique supposé constant est créé par un aimant permanent.

La partie tournante a un moment d'inertie  $J$ , son induit a une résistance  $R$  et une inductance  $L$ . Alimenté par la tension  $u(t)$ , il est alors parcouru par un courant  $i(t)$ .



1) En appliquant la loi d'Ohm à l'induit, exprimer la tension d'alimentation  $u(t)$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega(t)$ , du courant  $i(t)$  et de sa dérivée.

2) En prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente, en déduire une relation entre  $U(p)$ ,  $I(p)$  et  $\Omega(p)$ .

3) Sachant que pour les moteurs habituellement utilisés dans les asservissements l'influence de l'inductance est négligeable, simplifier la relation précédente.

4) La loi de la mécanique pour un solide en rotation s'écrit :

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C_{moteur} - C_{résistant}$$

Si on néglige tous les couples résistants, établir la relation liant la dérivée de la vitesse instantanée  $\Omega(t)$  et le courant  $i(t)$ .

5) En déduire une relation entre les transformées de Laplace de la vitesse et du courant  $\Omega(p)$  et  $I(p)$ .

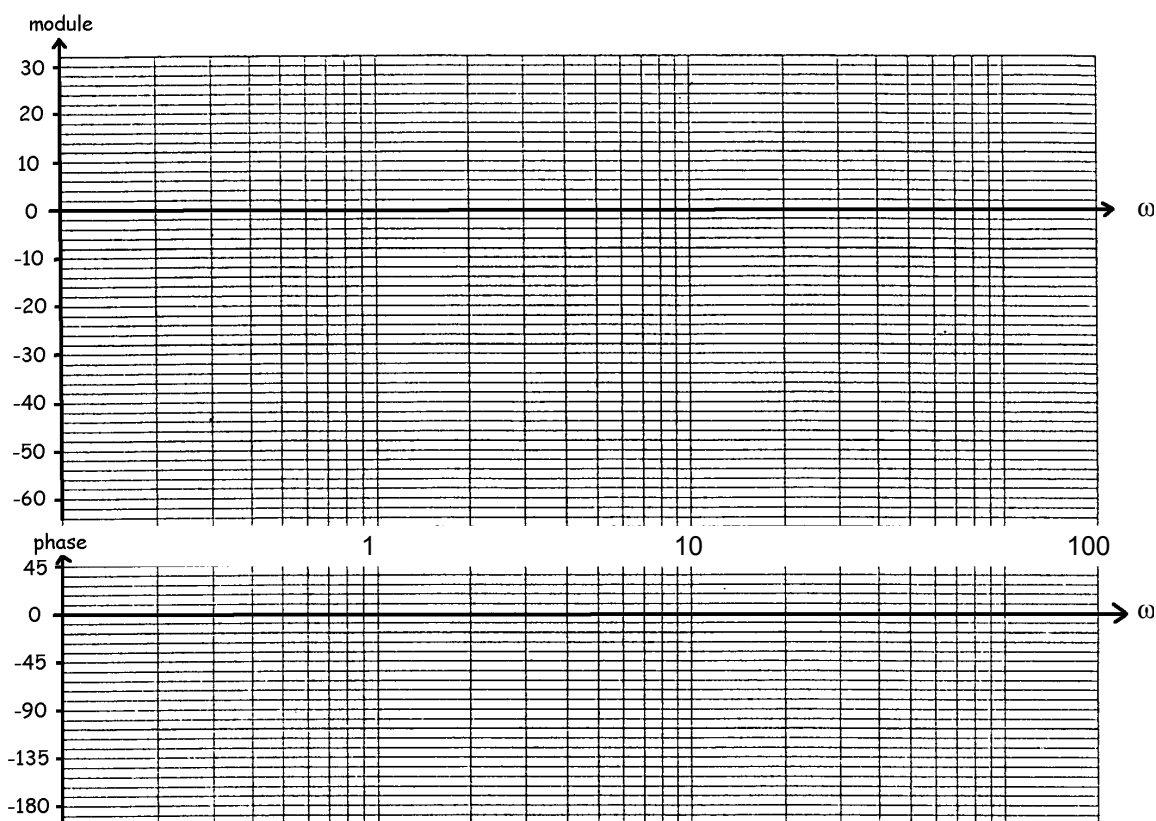
6) A partir des équations établies en 3) et en 5), écrire la relation entre la tension d'alimentation  $U(p)$  et la vitesse de rotation du moteur  $\Omega(p)$ .

7) En déduire la transmittance  $T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$  de ce moteur.

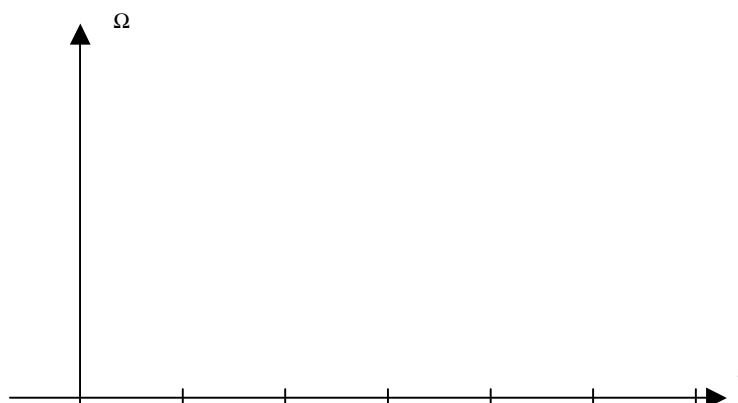
8) Application numérique :  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0$ ,  $K = 0,1 \text{ Vsrad}^{-1}$  et  $J = 0,005 \text{ kgm}^2$ . Donner l'expression numérique de la transmittance du moteur et commenter.

9) On applique sur l'induit du moteur une tension continue de  $U = 12 \text{ V}$ . Quelle est en régime permanent la vitesse de rotation  $\Omega$  du moteur ? quelle est sa vitesse  $n$  en tours/minute ?

10) Tracer le diagramme de Bode de ce moteur. Comment pourrait-on relever expérimentalement ce diagramme ?



11) Tracer la courbe de démarrage  $\Omega = f(t)$  du moteur lorsqu'on l'alimente sous une tension  $U = 10 \text{ V}$ . Quel sera le temps de démarrage à 5% de ce moteur ?



**Exercice REPO1 :**

$$1) 40.e(t) = 2.s(t) + s'(t) \quad 2) s(t) = S.\sin(10t + \varphi) \quad \text{avec} \quad S = E.|T| = 7,8 \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctg(10/2) = -79^\circ$$

$$3) s(t) = 200(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{avec} \quad \tau = 0,5s$$

4) Diagramme de Bode d'un passe-bas du premier ordre démarrant à 26 dB et phase nulle aux basses-fréquences et une cassure du premier ordre vers le bas à la pulsation  $\omega = 2$ .

**Exercice REPO2 :**

$$1) p_1 = -1+j2,5 \quad p_2 = -1-j2,5 \quad p_3 = -5+j1,5 \quad p_4 = -5-j1,5 \quad z_1 = -3$$

2)  $H_0 = 1$  car en régime permanent la sortie tend vers 1

$$3) T(p) = K \frac{p+3}{(p+1-j2,5)(p+1+j2,5)(p+5+j1,5)(p+5-j1,5)} = 65,85 \frac{p+3}{(p^2+2p+7,25)(p^2+10p+27,25)}$$

4) le temps de réponse à 5% mesuré est de l'ordre de 3 s

5) le système est du quatrième ordre, mais se comporte pratiquement comme un deuxième ordre (2 pôles dominants)

**Exercice REPO3 :**

A-  $T_1(p)$  a 1 pôle à  $-0,4$  le système est stable

$T_2(p)$  a 1 pôle à  $0,5$  le système est instable

$T_3(p)$  a 2 pôles à  $-3$  et  $2$  le système est instable

$T_4(p)$  a 1 pôle double à  $2$  le système est instable

$T_5(p)$  a 2 pôles à  $1+j$  et  $1-j$  le système est instable

B- Le système est du 5<sup>ème</sup> ordre, les pôles sont :  $1,15$   $-0,83 \pm j0,36$  et  $0,25 \pm j0,61$

Le système est instable parce qu'il a 3 pôles à partie réelle positive.

**Exercice REPO4 :**

$$1) 2) 3) H(p) = \frac{3,16}{1 + \frac{p}{2\pi \cdot 10}} = \frac{3,16}{1 + \frac{p}{62,8}} = \frac{3,16}{1 + 0,016p} \quad \text{soit} \quad H_0 = 3,16 = 10 \text{ dB} \quad \text{et} \quad \tau = 0,016 \text{ s}$$

$$4) s(t) = 31,6(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t_{r5\%} = 3\tau = 0,048 \text{ s} \quad \text{de } 10 \text{ à } 90 \% \quad t_m = 2,2\tau = 0,035 \text{ s}$$

**Exercice REPO5 :**

$$1) H(p) = \frac{200}{100 + 10p + p^2} = \frac{2}{1 + \frac{p}{10} + (\frac{p}{10})^2} \quad \text{soit} \quad H_0 = 2 \quad \omega_0 = 10 \text{ et} \quad m = 0,5$$

2) La réponse indicielle finit à  $S = 2$ , la réponse est oscillante avec  $D_1 = 15\%$  et  $D_2 = 2,5\%$

3) Le diagramme de Bode :

- démarre en BF avec une pente nulle : gain de 6 dB et phase nulle
- présente une cassure du second ordre vers le bas à 10 rads/s
- à cette pulsation, la courbe de gain passe par 6dB, il y a un léger pic avant la cassure

**Exercice REPO6 :**

Le système  $T_1(p)$  du **quatrième ordre** est caractérisé par :

- $p_1 = -0,4+j3$                        $p_2 = -0,4-j3$                        $p_3 = -5,7+j1,8$                        $p_4 = -5,7-j1,8$
- temps de montée 10-90% : 0,5 s
- amplitude du premier dépassement  $D_1 = 51\%$
- temps de réponse à 2 % : 8,5 s

Le système  $T_2(p)$  du **second ordre** est caractérisé par :

- $p_1 = -0,4+j3$                        $p_2 = -0,4-j3$
- temps de montée 10-90% : 0,4 s
- amplitude du premier dépassement  $D_1 = 63\%$
- temps de réponse à 2 % : 8,5 s

Les pôles dominants de  $T_1(p)$  sont  $p_1$  et  $p_2$  et  $T_1$  se comporte pratiquement comme  $T_2$ .

**Exercice REPO7 :**

1)  $H_0 = 10$             2)  $p_1 = -25+j76$              $p_2 = -25-j76$              $p_3 = -200$              $p_4 = -800$

3) On garde les pôles dominants  $p_1 = -25+j76$  et  $p_2 = -25-j76$ , ainsi que la même transmittance statique  $H_0$ .

$$H(p) = K \frac{1}{(p+25-j76)(p+25+j76)} = \frac{64010}{p^2+50p+6401} = \frac{10}{1+0,62\frac{p}{80}+(\frac{p}{80})^2}$$

4) pulsation propre  $\omega_0 = 80$             et            amortissement  $m=0,31$

5) La réponse est oscillante et tend vers  $S = 10$  avec  $D_1 = 37\%$ ,  $D_2 = 15\%$  et  $D_3 = 5\%$ .

Le temps de réponse à 5% est donné par l'abaque :  $t_r = 8/80 = 0,1s$

**Exercice REPO8 :**

1)  $u(t) = ri(t) + L \frac{di}{dt} + K\Omega(t)$                       2)  $U(p) = rI(p) + LpI(p) + K\Omega(p)$

3)  $U(p) = rI(p) + K\Omega(p)$

4)  $J \frac{d\Omega(t)}{dt} = Ki(t)$                       5)  $Jp\Omega(p) = KI(p)$

6)  $U(p) = \Omega(p) \left[ K + \frac{rJ}{K} p \right]$                       7)  $T(p) = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{rJ}{K^2} p} = \frac{T_0}{1 + \tau p}$

8) AN :  $T_0 = 10$             et             $\tau = 0,5 s$

9) En régime permanent :  $\Omega_0 = T_0 \cdot U = 120 \text{ rads/s} = 2292 \text{ trs/mn}$

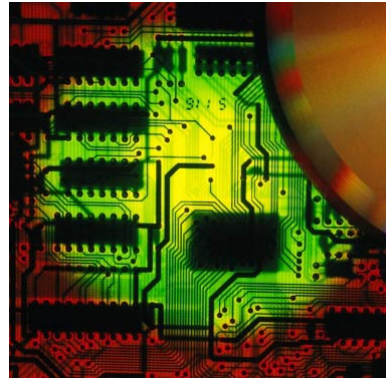
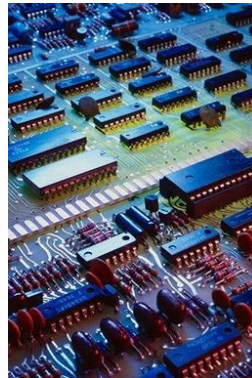
10) Le diagramme de Bode :

- démarre en BF avec une pente nulle : gain de 20 dB et phase nulle
- présente une cassure du premier ordre vers le bas à 2 rads/s

On peut tracer ce diagramme en appliquant sur le moteur une tension sinusoïdale de très basse fréquence et en relevant la vitesse avec une génératrice tachymétrique.

11) Alimenté sous 10V le moteur démarre selon une réponse du premier ordre, la vitesse se stabilise à 100 rads/s et le temps de réponse à 5% vaut :  $t_{r5\%} = 3\tau = 1,5 s$

# Questionnaire



jean-philippe muller



## Questions

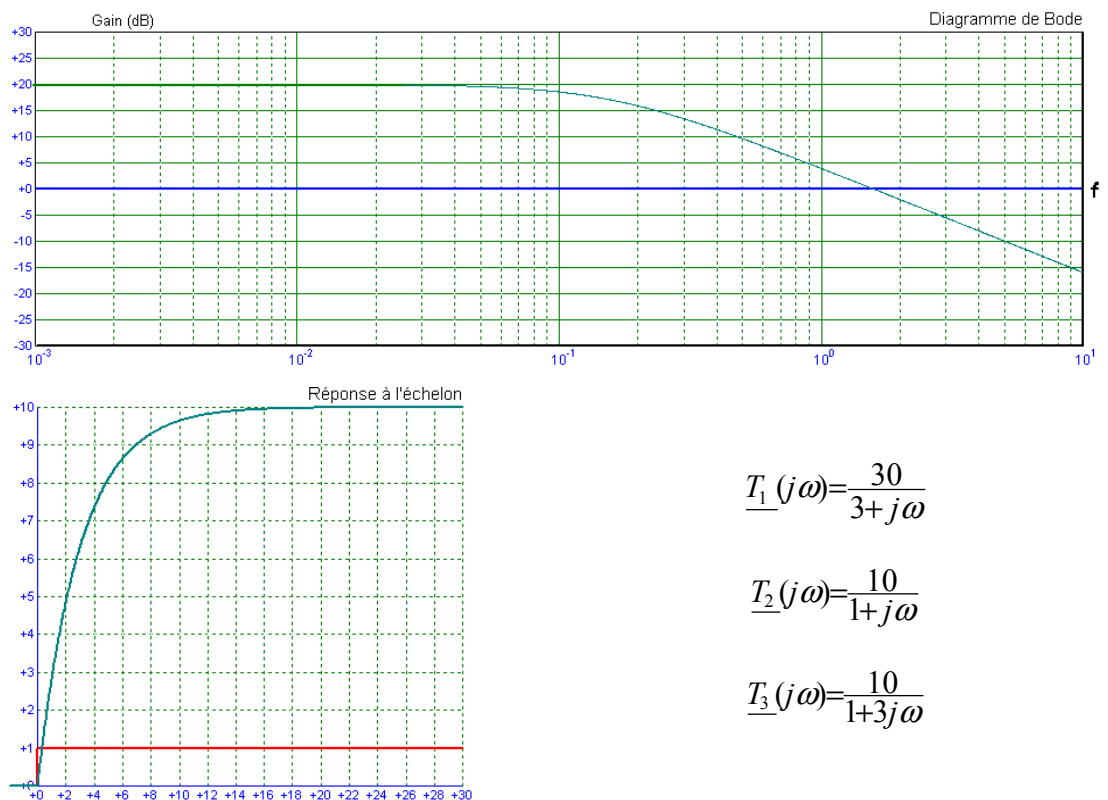
**1** On applique un signal sinusoïdal  $e(t) = 2\sin(10t)$  à l'entrée d'un système caractérisé par la transmittance :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{3}{2+5j\omega}$$

- a) l'amplification en continu vaut 3  
 b) l'amplification aux hautes fréquences vaut 3/5  
 c) le système est un passe-bas du premier ordre  
 d) l'équation différentielle correspondant au système s'écrit :  $s(t) + 5s'(t) = 2e(t)$   
 e) l'équation différentielle s'écrit :  $2s(t) + 5s'(t) = 3e(t)$   
 f) la sortie s'écrit  $s(t) = 0,12\sin(10t - 1,53)$   
 g) le temps de réponse à 5% à un échelon vaut 7,5 secondes

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**2** On a tracé la courbe de gain et la réponse indicielle de différents systèmes :



- a) le système est un passe-bas du premier ordre  
 b) la fréquence de coupure vaut environ 1,5 Hz  
 c) la courbe de gain correspond à la transmittance 1  
 d) la courbe de gain correspond à la transmittance 2  
 e) la réponse indicielle correspond à la transmittance 2  
 f) la réponse indicielle correspond à la transmittance 3

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**3** On s'intéresse à la stabilité des systèmes dont les transmittances sont les suivantes :

$$T_1(p) = \frac{1}{2+3p}$$

$$T_2(p) = \frac{12p}{5-p}$$

$$T_3(p) = \frac{10}{p(p+1)(p-2)}$$

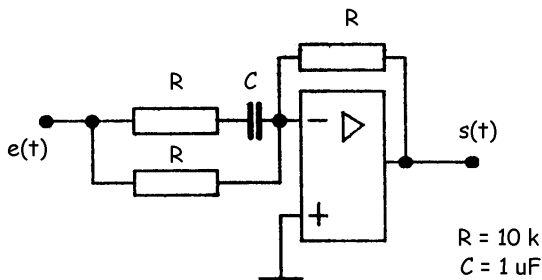
$$T_4(p) = \frac{2}{p^2-p-6}$$

$$T_5(p) = \frac{12}{p^2+2p+2}$$

- a)  $T_1$  est stable  
 b)  $T_2$  est stable  
 c)  $T_3$  est stable  
 d)  $T_4$  est stable  
 e)  $T_5$  est stable

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**4** On donne le montage suivant et sa transmittance de Laplace :



$$H(p) = \frac{1+2RCp}{1+RCp}$$

- a) la transmittance en continu vaut  $H_0 = 1$   
 b) l'amplification aux fréquences élevées vaut 10 dB  
 c) le diagramme de Bode comporte une seule cassure  
 d) le diagramme de Bode a une cassure vers le haut, puis une seconde vers le bas

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**5** Un système du troisième ordre a des pôles à  $-2$ ,  $-8+j$  et  $-8-j$  et est caractérisé par la transmittance :

$$T(p) = \frac{260}{(p+2)(p^2+16p+65)}$$

- a) le pôle à  $-2$  est le pôle dominant  
 b) l'amplification en continu vaut 2  
 c) le temps de réponse à 5% du système vaut environ 1,5 s  
 d) le système simplifié correspond à la transmittance  $T_1$   
 e) le système simplifié correspond à la transmittance  $T_2$

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$T_1(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$T_2(p) = \frac{260}{p+2}$$



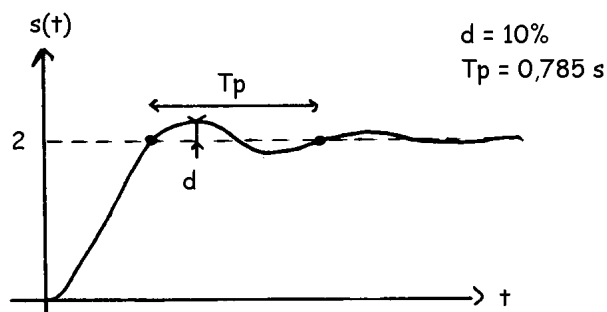
**6** Un système du second ordre a la transmittance :

$$T(p) = \frac{100}{100 + 20p + p^2}$$

- a) sa transmittance en continu vaut 100  
 b) sa pulsation propre vaut  $\omega_0 = 10$  rad/s  
 c) son amortissement est égal à  $m = 1$   
 d) il est possible de simplifier l'expression de  $T(p)$   
 e) le temps de réponse à 5% vaut environ 4,7 s

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**7** Le système dont la réponse indicielle est la suivante correspond-il à la transmittance  $H(p)$  ?



$$H(p) = \frac{2}{1 + 0,12p + 0,01p^2}$$

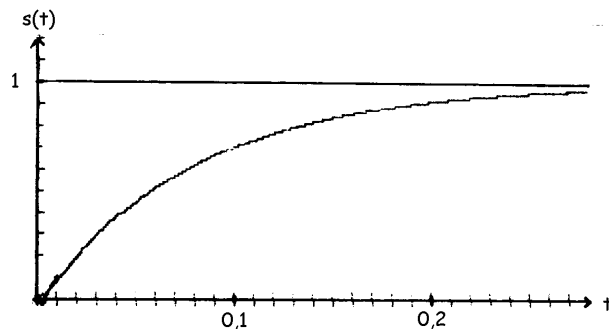
On rappelle la relation entre pulsation propre et la pseudo pulsation :

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1-m^2}}$$

- a) l'enregistrement montre que le système a une amortissement de  $m = 0,43$   
 b) l'enregistrement montre que le système a une amplification en continu  $H_0 = 2$   
 c) la pseudo-pulsation vaut  $\omega_p = 10$  rad/s  
 d) la pulsation propre du système a pour valeur  $\omega_0 = 10$  rad/s  
 e) le système étudié a bien pour transmittance de Laplace la fonction  $H(p)$  donnée

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

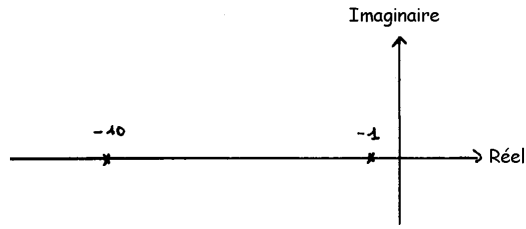
**8** Un système passe-bas du second ordre a deux pôles  $p_1 = -12,5$  et  $p_2 = -770$  et l'enregistrement de sa réponse indicielle a donné le résultat suivant :



- a) ce système se comporte comme un premier ordre  
 b) le pôle  $p_2$  est très élevé et peut rendre le système instable  
 c) sa constante de temps vaut environ  $\tau = 0,08$  s  
 d) cette constante de temps correspond au pôle dominant  $p_2$

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

9 Un système linéaire a une transmittance de 5 en continu et le diagramme des pôles ci-dessous :



$$H_1(p) = \frac{5}{(1+p)(1+0,1p)}$$

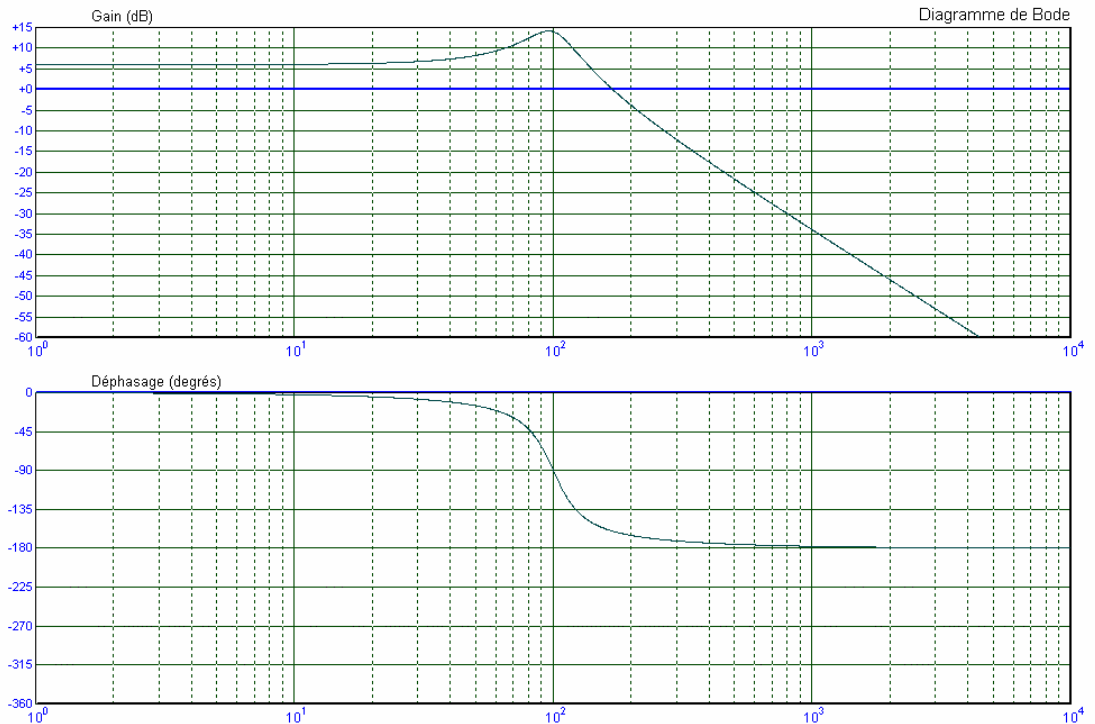
$$H_2(p) = \frac{5}{1+1,1p+0,1p^2}$$

$$H_3(p) = \frac{50}{p^2+10+11p}$$

- a) le système est stable
- b) le système admet comme transmittance la fonction  $H_1(p)$
- c) le système admet comme transmittance la fonction  $H_2(p)$
- d) le système admet comme transmittance la fonction  $H_3(p)$

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

10 Le tracé du diagramme de Bode de la transmittance  $H(jf)$  d'un système est le suivant :



- a) il y a 2 moyens de vérifier sur la courbe qu'il s'agit d'un système du second ordre
- b) l'amplification en continu vaut  $H_0 = 4$
- c) la cassure sur la courbe de gain se trouve à 100 Hz
- d) la fréquence propre vaut  $f_0 = 180$  Hz et se mesure à  $|H| = 0$  dB
- e) l'amortissement vaut  $m = 0,2$
- f) la transmittance  $H(p)$  ci-dessous correspond aux courbes tracées

Vrai	Faux
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$H(p) = \frac{788768}{394384 + 251,2p + p^2}$$



## Réponses

N°	Réponses justes	Commentaires
1	c, e, f, g	a) $T_0 = 1,5$ b) en HF $T \approx 0$
2	a, d, f	b) la fréquence de coupure est mesurée à 17db (20-3) et vaut 0,16 Hz
3	a, e	b) pôle à +5 donc instable c) pôles à 0, -1 et +2 donc instable d) pôles à -2 et +3 donc instable
4	a, d	b) aux hautes fréquences $H \approx 2 = 6$ dB c) cette transmittance a une cassure au numérateur et une au dénominateur
5	a, b, c	d) e) le système simplifié a un pôle à -2 et une amplification en continu de 2 et s'écrit donc $T_i(p) = \frac{4}{p+2}$
6	b, c, d	a) en continu $p = 0$ et $T_0 = 1$ b) avec $m = 1$ et $\omega_0 = 10$ , l'abaque donne un temps de réponse de 0,47 s
7	b, d, e	a) pour un dépassement de 10%, l'abaque donne un amortissement $m = 0,6$ c) la pseudo pulsation vaut : $\omega_p = 2\pi/T_P = 8$ rad/s
8	a, c	b) un pôle négatif ne rend jamais un système instable d) le pôle dominant est celui qui est le plus proche de l'origine, soit $p_1$ et la constante de temps est directement liée à ce pôle puisque $1/p_1 = 0,08s = \tau$
9	a, b, c, d	
10	a, c, f	a) pour un second ordre, la pente de la courbe de gain aux fréquences élevées est de -40 dB/de cet la phase descend à -180 degrés b) en BF, le gain vaut 6dB soit $H_0 = 2$ d) la fréquence propre est la fréquence de la cassure, soit $f_0 = 100$ Hz e) à la cassure, la transmittance s'écrit $H = H_0/2m = 14$ dB = 5 on en déduit la valeur de l'amortissement $m$ 0,2