Module :

filtrage numérique

- **Diaporamas (2) : conversion, filtrage numérique**

- **Itinéraire pédagogique**

- **Résumé de cours**

  1- Transformée en z d'une séquence
  2- Transmittance en z d'un filtre numérique
  3- Algorithme de calcul de y_n
  4- Stabilité d'un filtre numérique
  5- Réponse harmonique
  6- Réalisation d'un filtre numérique
  Annexe : acquisition d'un signal analogique – règle de Shannon
  Annexe : tableau des transformées en z

- **Exercices**

- **Corrigés des exercices**

- **Questionnaires : acquisition d'un signal analogique - filtrage numérique**

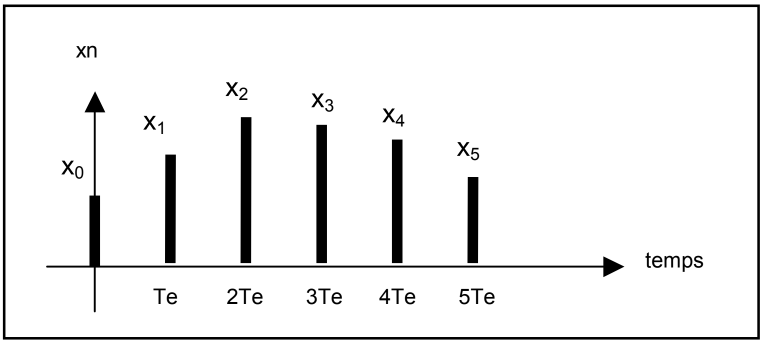
- **Réponses au questionnaire**

1) Transformée en z d'une séquence :

Le signal analogique est maintenant numérisé et transformé en une suite de valeurs numériques xn codées sur N bits qu'on représente par des segments dont la hauteur est proportionnelle à la valeur binaire.

C'est une façon commode de représenter graphiquement une séquence numérique xn constituée des valeurs du signal x(t) aux instants t=0, Te, 2Te ... On supposera que le signal x(t) est nul pour t<0.

Figure 1. Séquence d'échantillons.



On appelle transformée en z de la séquence numérique xn le polynôme X(z) défini par la relation :

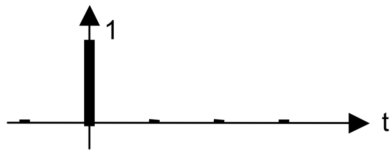
$$\mathbf{X(z) = x_0 + x_1.z^{-1} + x_2.z^{-2} + x_3.z^{-3} + ...}$$

Prenons quelques exemples simples :

- séquence impulsion unité :

xn = 1 à t = 0
xn = 0 à Te, 2Te ...

X(z) = 1



- séquence échelon :

xn = 0 si t < 0
xn = 1 si t ≥ 0

$$X(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + ... = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

D'autres transformées en z de signaux usuels sont donnés en Annexe.

Remarque : en réalité, cette transformée en z n'est rien d'autre qu'une transformée de Laplace cachée derrière le changement de variable :

$$\mathbf{z = e^{Tep}}$$

En effet, le signal échantillonné x*(t) peut s'écrire :

$x^*(t) = x_0.\delta(t) + x_1.\delta(t\text{-}Te) + x_2.\delta(t\text{-}2Te). + x_3.\delta(t\text{-}3Te) + ...$ où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac

La transformée de Laplace de x*(t) s'écrit alors :

$X^*(p) = x_0.1 + x_1.e^{-Tep} + x_2.\ e^{-2Tep} + x_3\ .e^{-3Tep} + ...$ et, si on pose $z = e^{Tep}$

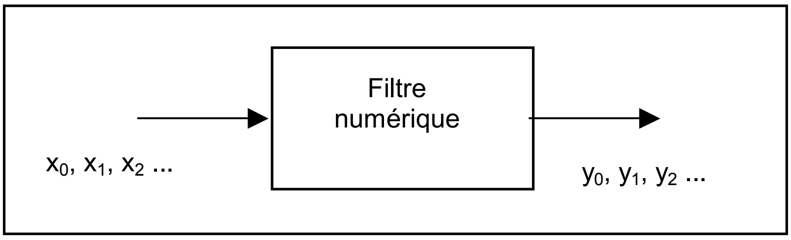
$X(z) = x_0 + x_1.z^{-1} + x_2.z^{-2} + x_3.z^{-3} + ...$

La transformée en z d'un signal a donc les mêmes propriétés mathématiques que la transformée de Laplace.

2) Transmittance en z d'un filtre numérique :

Soit un système qui à une séquence d'entrée xn restitue en sortie une séquence yn :

Figure 2. Transmittance d'un filtre numérique.



Soient X(z) et Y(z) les transformées en z des séquences d'entrée et de sortie.

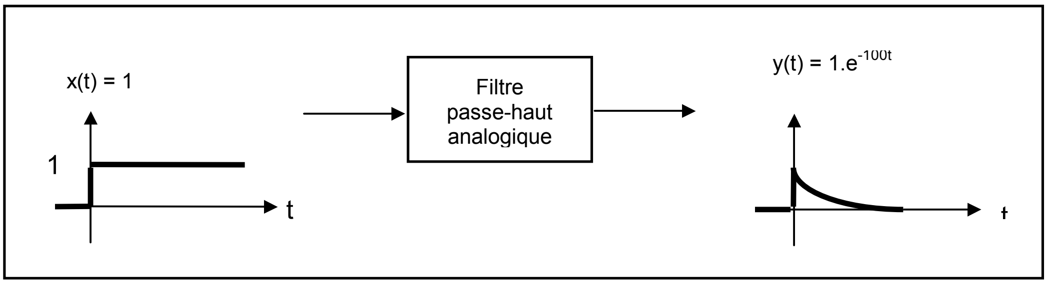
La transmittance T(z) du filtre est alors définie par :

$$\mathbf{T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

Puisque les transformées X(z) et Y(z) sont des polynômes contenant les puissances négatives de z, la transmittance sera un rapport de deux polynômes en puissances négatives de z.

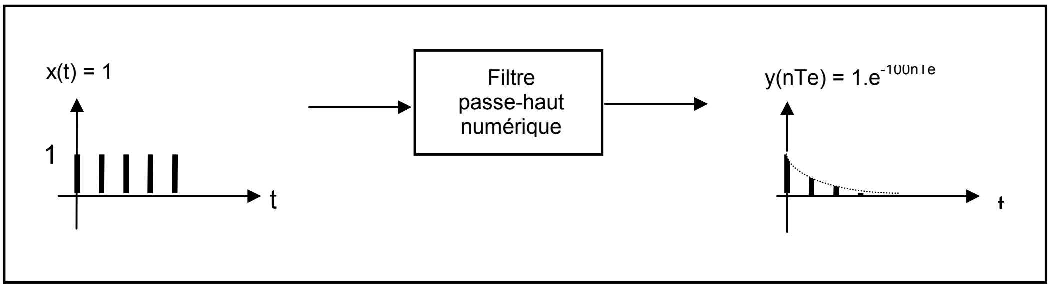
Cherchons par exemple la transmittance d'un filtre passe-haut numérique qui répondrait à un échelon d'un façon identique à un filtre analogique de constante de temps τ = 10 ms et donc de fréquence de coupure fc = 1/ $2\pi\tau$ = 15,9 Hz :

Figure 3. Réponse indicielle d'un filtre analogique passe-haut.



Le filtre numérique équivalent aurait le comportement suivant :

Figure 4. Réponse indicielle d'un filtre numérique passe-haut.



Si le signal est échantillonné à Fe = 1 kHz, soit Te = 1 ms, alors :

$X(z) = z/(z - 1)$ et $Y(z) = z/(z - k)$ avec $k = e^{-100.Te} = 0{,}905$

Nous en déduisons la transmittance du filtre : **$T(z) = Y(z)/X(z) = (z - 1)/(z - 0{,}905)$**

Remarque : cet exemple montre qu'il est aisé de trouver la transmittance d'un filtre numérique qui à une entrée donnée répond par une sortie de forme particulière. Cette technique de synthèse de filtres numériques s'appelle la **méthode de l'identification de la réponse impulsionnelle** ou **indicielle**.

3) Algorithme de calcul de yn :

L'algorithme nous permet de calculer la valeur de l'échantillon de sortie yn en fonction des échantillons d'entrée et de sortie précédents.

Le filtre numérique le plus général peut se décrire par un algorithme de calcul de la forme :

$$\mathbf{y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + a_3.y_{n-3} + ... + a_p.y_{n-p} + b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2} + ... + b_q.x_{n-q}}$$

Il utilise donc pour calculer la sortie à l'instant t = nTe les p échantillons précédents de la sortie et les q échantillons précédents de l'entrée, plus celui qui vient d'être appliqué sur l'entrée x_n.

Suivant la forme de l'algorithme, on distingue **deux grandes familles de filtres** qui ont chacune leurs propriétés particulières :

- filtres pour lesquels la sortie ne dépend que des entrées et pas des sorties

  - leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un certain temps
  - ils s'appellent **filtres non récursifs** ou à **réponse impulsionnelle finie (FIR)**
  - ils n'ont pas d'équivalent analogique
  - exemple : le filtrage par moyenne glissante $y_n = (x_n + x_{n-1} + x_{n-2})/3$

- filtres pour lesquels la sortie dépend des entrées et des sorties précédentes

  - leur réponse à une impulsion s'annule au bout d'un temps infini
  - ils s'appellent **filtres récursifs** ou à **réponse impulsionnelle infinie (IIR)**
  - exemple : le passe-bas du premier ordre $y_n = 0,5.y_{n-1} + 0,25.(x_n + x_{n-1})$

Pour passer l'algorithme à la transmittance, on utilise une règle très simple :

1- écrire l'algorithme : $\mathbf{y_n = a_1.y_{n-1} + a_2.y_{n-2} + ... + a_p.y_{n-p} + b_0.x_n + b_1.x_{n-1} + b_2.x_{n-2} + ... + b_q.x_{n-q}}$

2- passer en z en faisant correspondre $Y(z).z^{-i}$ à y_{n-i} et $X(z).z^{-j}$ à x_{n-j}

3- regrouper les termes en Y(z) à gauche et les termes en X(z) à droite

4- calculer T(z) = Y(z)/X(z)

Les mêmes opérations menées en sens inverse permettent de passer de la transmittance à l'algorithme.

Exemple d'application :

Quel est l'algorithme réalisant le filtre passe-haut de transmittance : **T(z) = (z-1)/(z-0,905) = Y(z)/X(z) ?**

1- on effectue le produit en croix et on en déduit : Y(z).(z-0,905) =X(z).(z-1)

2- cela donne, en développant : z.Y(z) - 0,905.Y(z) = z.X(z) - X(z)

3- pour avoir des puissances négatives de z, on divise par z : $Y(z) -0,905.Y(z).z^{-1} = X(z) - X(z).z^{-1}$

4- on isole enfin Y(z) : $Y(z) = 0,905.Y(z).z^{-1} + X(z) - X(z).z^{-1}$

5- en appliquant la règle de passage, on en déduit l'algorithme : $\mathbf{y_n = 0,905.y_{n-1} + x_n - x_{n-1}}$

Remarque : il faut toujours se ramener à des puissances négatives de z, car $X(z).z^{+2}$ correspondrait à x_{n+2} , échantillon inconnu qui n'arrivera que 2 périodes d'échantillonnage plus tard.

4) Stabilité d'un filtre numérique :

Comme pour les filtres analogiques, il est possible de prévoir à partir de la transmittance la stabilité ou l'instabilité du système physique correspondant :

- pour déterminer si un système analogique continu de transmittance T(p) est stable on calcule les pôles qui sont les valeurs de p annulant le dénominateur
- le système est stable si les pôles sont négatifs ou complexes avec une partie réelle négative
- si on place ces pôles dans le plan complexe, ils se trouvent tous dans le demi-plan de gauche

Ce critère de stabilité reste valable pour les transmittances T*(p) des systèmes échantillonnés.

⇒ **un système échantillonné de transmittance T*(p) est stable si tous ses pôles** $p_i = a_i + jb_i$ **sont négatifs ou complexes à partie réelle négative (**$a_i < 0$)

Comme avec les systèmes échantillonnés on travaille le plus souvent avec les transmittances en z, il est intéressant de voir la position des pôles z_i dans le plan pour un système stable .

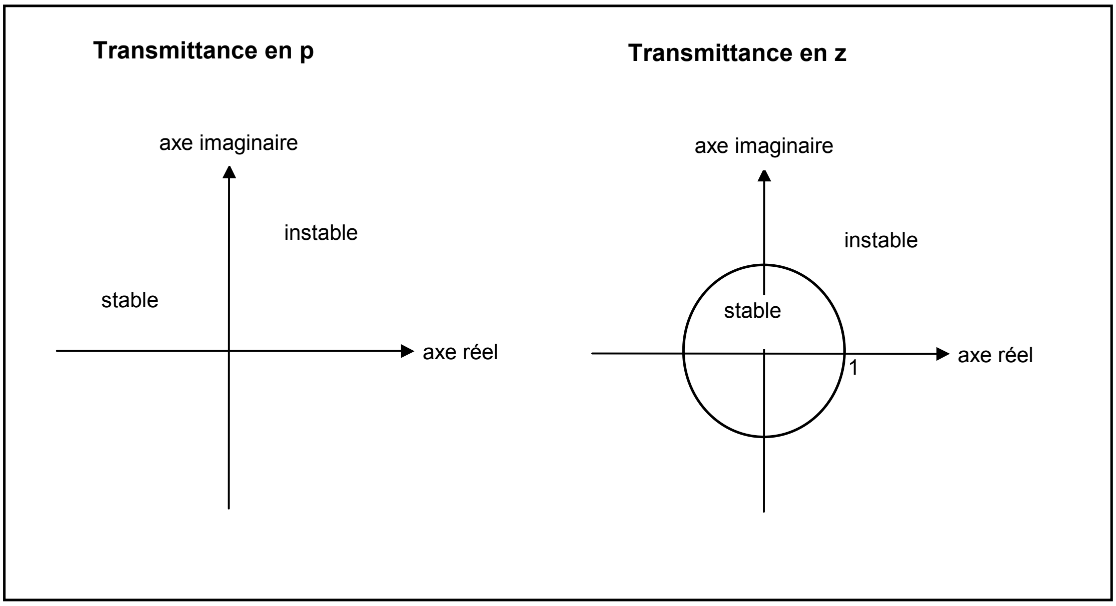
Question : où se trouvent les valeurs de z correspondant aux pôles des systèmes stables ?

- la valeur de z se calcule facilement : $z_i = e^{Te.\,pi} = e^{Te.\,(ai + jbi)} = e^{Te.\,ai}(\cos b_i + j\sin b_i)$
- si $a_i < 0$, le module du nombre complexe est inférieur à 1 : $z_i = e^{Te.\,Ai} < 1$
- le nombre complexe z_i se trouve donc à l'intérieur d'un cercle centré sur l'origine et de rayon 1

Nous en déduisons un critère de stabilité graphique pour un système échantillonné :

⇒ **un système échantillonné de transmittance T(z) est stable si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité.**

Figure 5. Critère de stabilité d'un système numérique.



Exemple :

Le filtre de transmittance T(z) = (z-1)/(z-0,905) a un pole $z_1 = 0,905$

- le pôle est à l'intérieur du cercle unité
- le filtre est donc stable

5) Réponse harmonique d'un filtre numérique :

Pour représenter la courbe de gain et de phase d'un filtre, il faut étudier sa transmittance complexe .

Or nous avons vu que la transformée en z n'est qu'une transformé de Laplace avec un changement de variable.

On passe donc très simplement de T(z) à T*(p) et à $\underline{T}$*(jω) :

$$T(z) \xrightarrow{z = e^{Tep}} T^*(p) \xrightarrow{p = j\omega} \underline{T}^*(j\omega)$$

L'expression obtenue pour la transmittance complexe comporte des exponentielles complexes et est donc assez lourde à manipuler mathématiquement.

Exemple : filtre moyenneur sur deux valeurs : $y_n = 0{,}5(x_n + x_{n-1})$

On passe aisément à T(z) :

$Y(z) = 0{,}5(\ X(z) + X(z).z^{-1}\ ) = 0{,}5.X(z)(\ 1 + z^{-1}\ )$ d'où : $T(z) = 0{,}5(\ 1 + z^{-1}\ )$

puis à la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$:

$\underline{T}(j\omega) = 0{,}5(\ 1 + e^{-Tej\omega}\ ) = 0{,}5.(\ 1 + \cos(\omega Te) - j\sin(\omega Te)\ )$

et, enfin, au module et à l'argument de la transmittance :

$T = 0{,}707\sqrt{1 + \cos(2\pi f/Fe)}$ et $\varphi = -\text{arctg}\left(\dfrac{\sin(2\pi f/Fe)}{1+\cos(2\pi f/Fe)}\right)$

Si la fréquence d'échantillonnage vaut Fe = 1 kHz, le diagramme de Bode aura l'allure suivante :

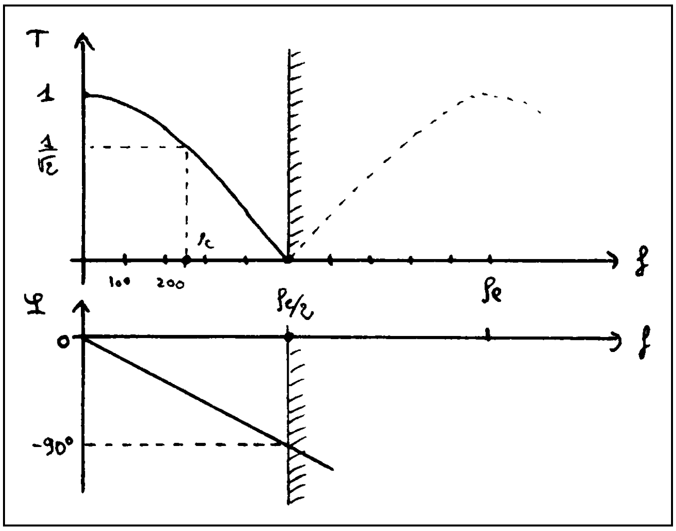


Figure 6. Diagramme de Bode d'un filtre moyenneur.

On peut remarquer que :

- la bande de fréquences utile va de 0 à Fe/2 pour respecter la règle de Shannon
- dans cette bande le filtre est un passe-bas
- la fréquence de coupure déterminée graphiquement est de l'ordre de 250 Hz
- la courbe de phase est linéaire

6) Réalisation d'un filtre numérique :

Pour les **filtres simples**, on peut trouver l'algorithme avec la **méthode par identification de la réponse indicielle** ou **impulsionnelle**.

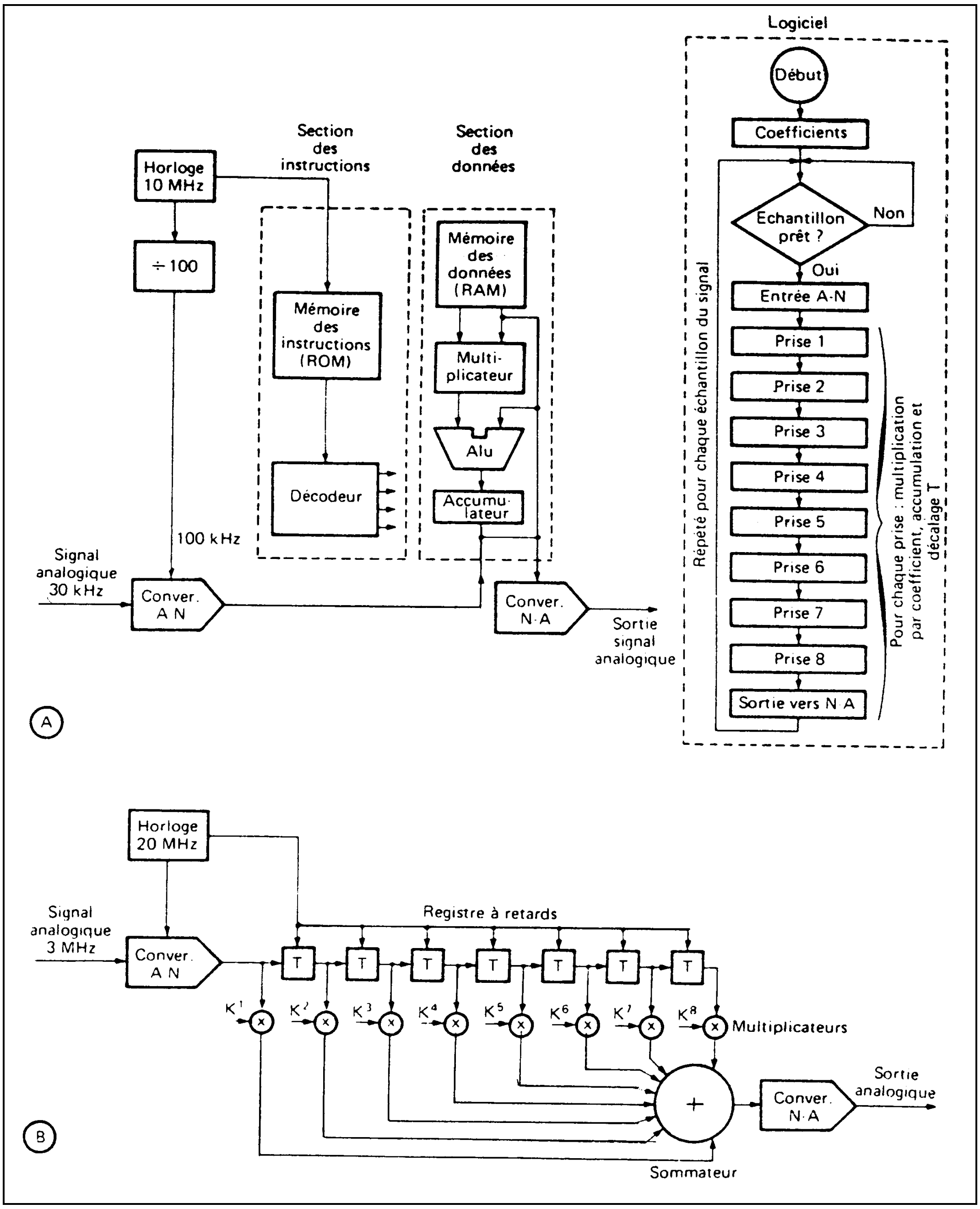
Les **filtres sophistiqués** sont élaborés par des **logiciels de synthèse de filtre numériques** auxquels il suffit de fournir le gabarit souhaité. Le logiciel fournit alors le jeu de coefficients correspondants.

Pour réaliser concrètement un filtre numérique on a deux possibilités :

- travailler en logique câblée (assemblage de mémoires, additionneurs, multiplieurs, etc ...)
- utiliser un système programmé (microprocesseur spécialisé ou non)

Avec l'augmentation extraordinaire de la vitesse de calcul des processeurs spécialisés dans le traitement du signal, les filtres en logique câblées sont aujourd'hui limités aux dispositifs très rapides.

Figure 7. Réalisation pratique de filtres numériques.



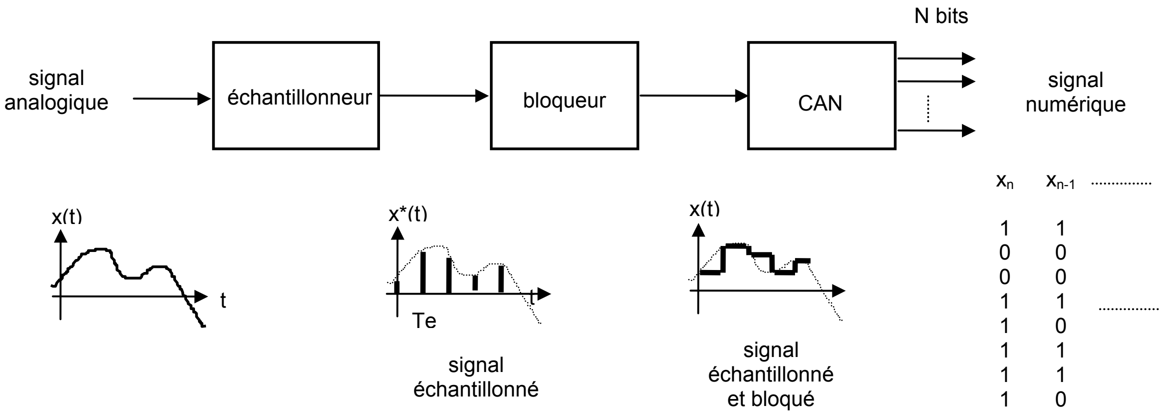
La grande supériorité des filtres numériques sur les filtres analogiques est la possibilité qu'ils offrent de pouvoir évoluer au cours du temps en réactualisant régulièrement les valeurs des coefficients.

Annexe : acquisition d'un signal analogique

Elle se fait en trois phases distinctes :

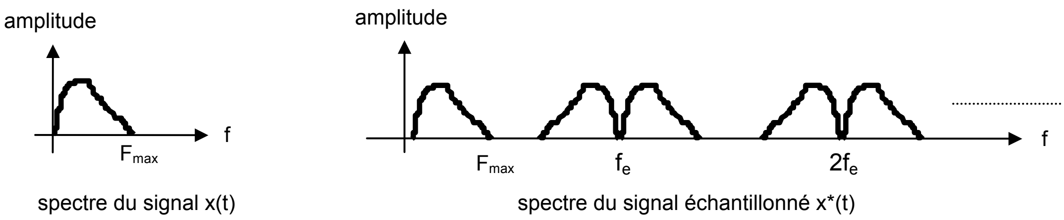
- la prise d'un échantillon (ou échantillonnage) à la fréquence f_e
- son maintien (ou blocage) durant la conversion A/N
- la conversion analogique-numérique sur N bits (N = 8,12 ou 16 en général)

Le résultat de la conversion est une séquence numérique ou suite de mots binaires fournis par le CAN toutes les T_e secondes : x_n , x_{n-1} , x_{n-2} , x_{n-3} …



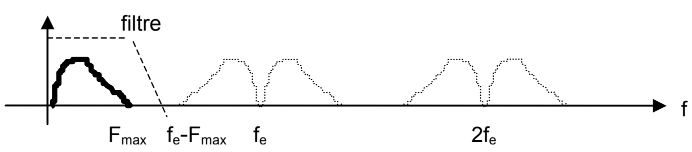
Question essentielle : à quelle fréquence f_e faut-il prendre les échantillons ?

On démontre qu'on obtient le spectre de x*(t) en reproduisant le spectre de x(t) autour de chaque multiple de la fréquence d'échantillonnage f_e :



L'échantillonnage est bien mené (pas de perte d'information) si l'opération est réversible.

Dans le cas de la figure, il est possible de repasser du signal échantillonné au signal analogique initial avec un simple filtre passe-bas :



L'échantillonnage n'est donc réversible que si on choisit une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée, soit : $f_e - F_{max} > F_{max}$ d'où $f_e > 2F_{max}$

Réponse : pour échantillonner sans perdre d'information, il faut choisir $\mathbf{f_e > 2F_{max}}$ (règle de Shannon)

La règle de Shannon conduit, pour la numérisation de la voix, aux choix suivants :

- **qualité téléphonique** : F_{max} = 3,4 kHz et f_e = 8 kHz, N = 8 bits, débit D = 8.8000 = **64 kbits/s**
- **qualité hi-fi** : F_{max} = 20 kHz, f_e = 44,1 kHz, N = 16 bits, stéréo, D = 2.16.44100 = **1,41 Mbits/s**

Annexe : tableau des transformées en z

Expression temporelle	Transformée en z
$f(t)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - nT)$	z^{-n}
A	$\dfrac{Az}{z-1}$
At	$\dfrac{ATz}{(z-1)^2}$
e^{-at}	$\dfrac{z}{z - e^{-aT}}$
te^{-at}	$\dfrac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\dfrac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\dfrac{z^2 - ze^{-aT}\cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos \omega T + e^{-2aT}}$
retard $f(t - nT)$	$z^{-n} F(z)$
$a f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$

T : période d'échantillonnage

Exercices d'application

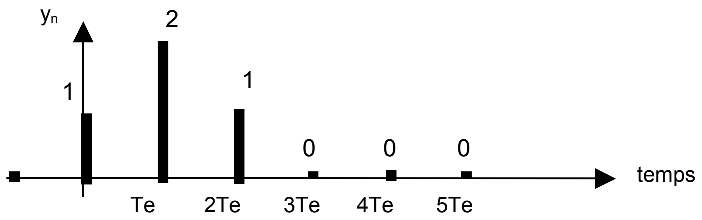
jean-philippe muller

version janvier 2008

NUM1- Outils pour les filtres numériques

Savoir utiliser les différentes techniques liées à l'étude des filtres numériques

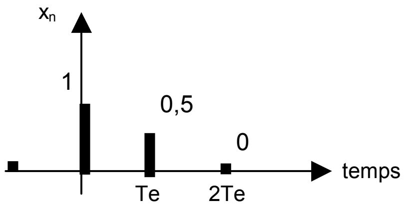
1) Calculer la transformée en z de la séquence y_n suivante :



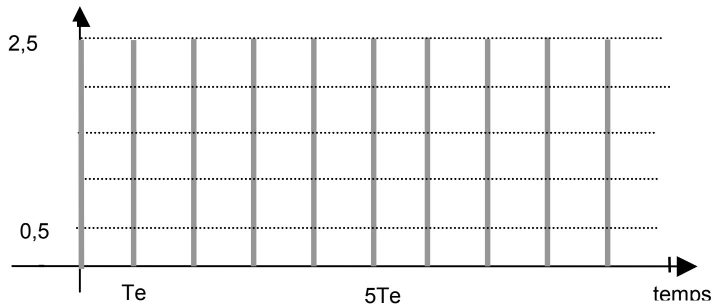
2) Ce signal peut s'écrire sous forme analogique de la façon suivante : $y(t) = 1.\delta(t) + 2.\delta(t-T_e) + 1.\delta(t-2T_e)$
Sachant que $L\{\delta(t)\} = 1$, calculer alors sa transformée de Laplace Y(p).

3) En déduire qu'on peut passer facilement de Y(z) à Y(p) par un simple changement de variable qu'on précisera.

4) Si cette séquence y_n est la réponse d'un filtre à l'entrée x_n ci-dessous, déterminer la transmittance T(z) de ce filtre.



5) En déduire son algorithme et dessiner sa réponse à une impulsion et à un échelon. Estimer la transmittance en continu To de ce filtre.



6) Etudier la stabilité du filtre.

7) A partir de la transmittance T(z),retrouver la transmittance en continu To de ce filtre.

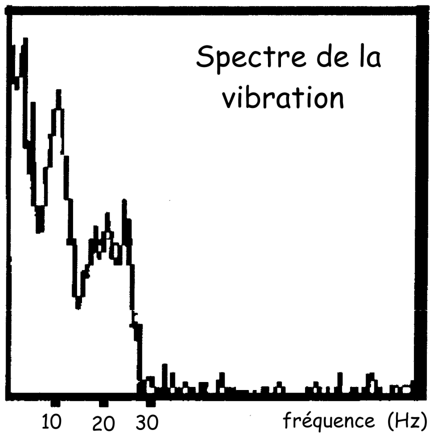
8) Ecrire sa transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$, puis les formules du module et de l'argument, sans les développer.

NUM2- Acquisition du signal issu d'un capteur

comprendre la structure d'une chaîne d'acquisition et l'utilité du filtre anti repliement

Un capteur de vibrations placé sur une structure métallique enregistre ses vibrations.

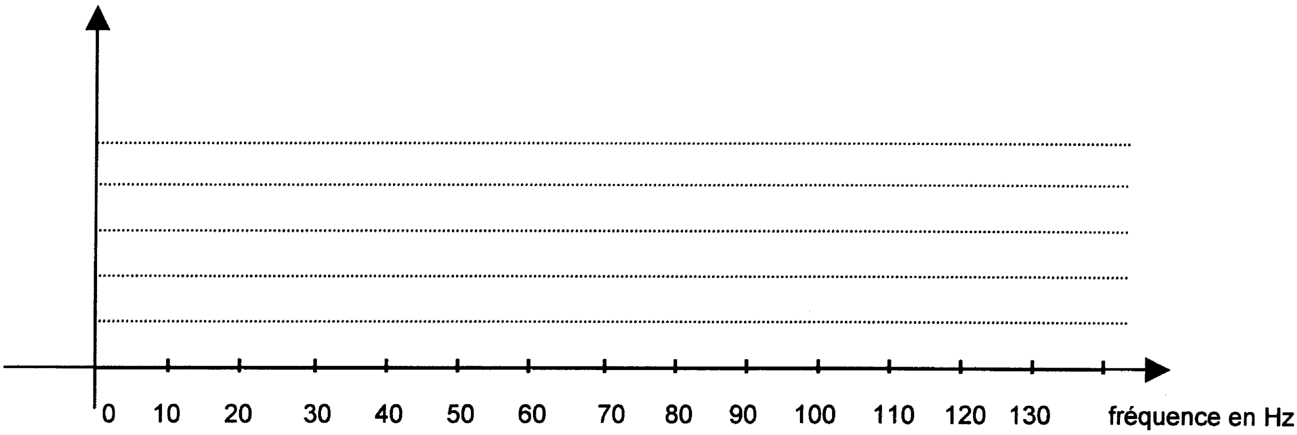
Le spectre fourni par un analyseur FFT a l'allure ci-contre :



1) Dans quelle bande de fréquences se situent ces vibrations ?

Pour traiter et stocker ce signal, on l'envoie sur un système d'acquisition relié à un PC. L'opérateur choisit une fréquence d'échantillonnage de f_e = 70 Hz pour respecter le théorème de Shannon.

2) Tracer l'allure du spectre du signal échantillonné.



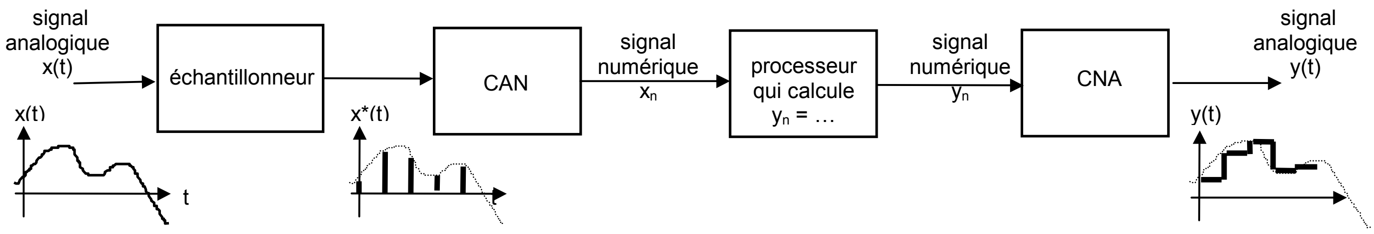
3) Suite à un défaut de câblage, le signal de vibration se trouve parasité par le 50 Hz du secteur. Comment est modifié le spectre du signal échantillonné ? Quel est le défaut qui est apparu ?

4) Dessiner la structure de la chaîne d'acquisition allant du capteur au convertisseur analogique-numérique permettant de faire une acquisition correcte du signal.

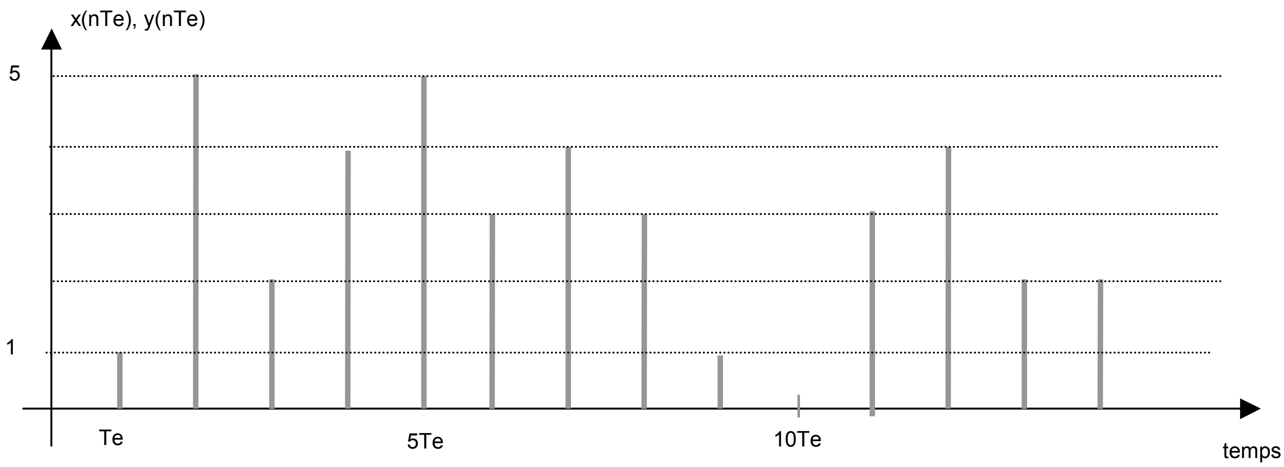
NUM3- Filtre à moyenne glissante

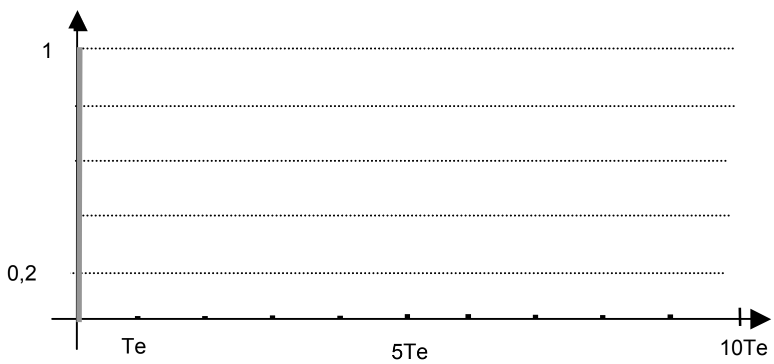
comprendre le fonctionnement d'un filtre numérique simple

Un système de filtrage numérique échantillonne le signal analogique à la fréquence **fe = 11 kHz**, traite le signal numérique par l'algorithme : $\mathbf{y_n = 0{,}5.(x_n + x_{n-1})}$ puis transforme à nouveau le signal numérique en signal analogique :



1) En faisant manuellement le même travail que le processeur, calculer et tracer la réponse du filtre à la séquence numérique x_n donnée ci-dessous :

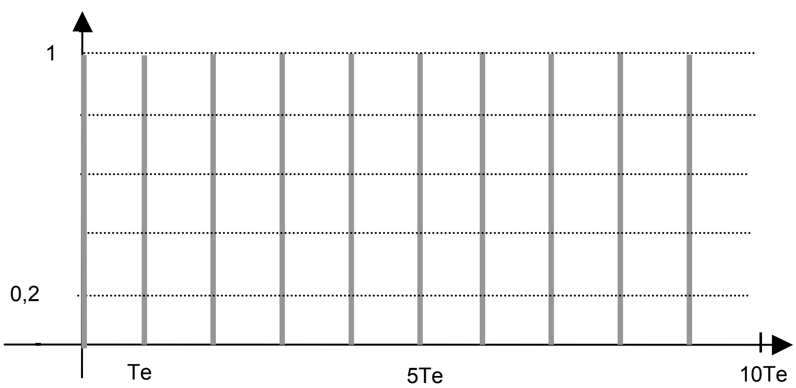




2) Tracer la réponse impulsionnelle du filtre.

3) Combien de termes non nuls comporte-t-elle ?

4) Le filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ? à réponse impulsionnelle infinie ?



5) Tracer la réponse indicielle du filtre.

6) Quelle est son amplification en continu ?

7) Quel est le type de ce filtre : passe-bas, passe-haut passe-bande ?

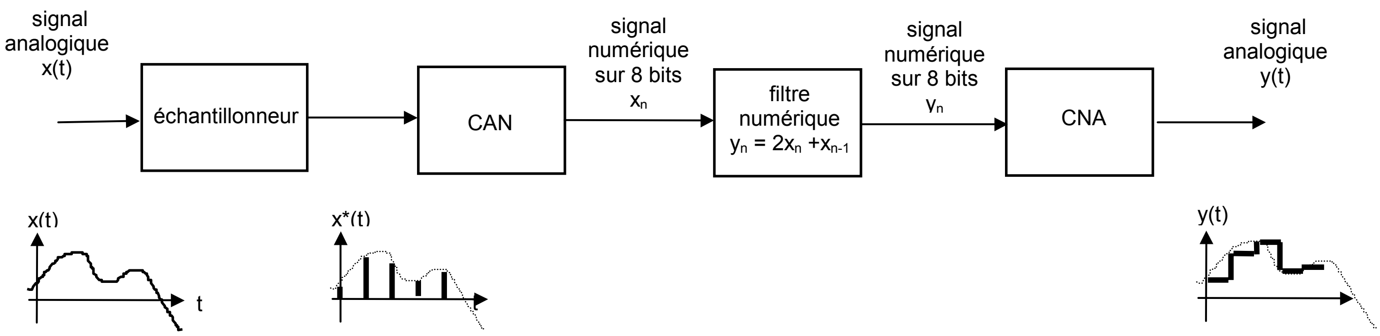
8) Simuler ce filtre avec **Xnum** et retrouver les résultats précédents.

9) Visualiser sa courbe de réponse en fréquence et estimer sa fréquence de coupure fc.

NUM4- Etude d'un filtre numérique

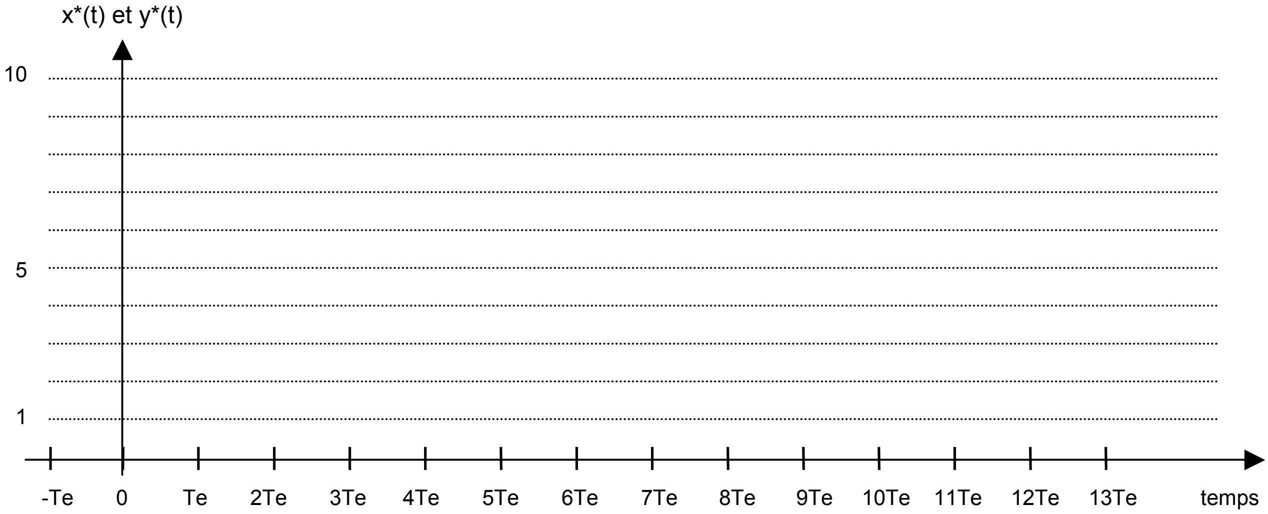
maîtriser les étapes de l'étude d'un filtre numérique

Un système de traitement numérique échantillonne un signal analogique x(t) à la fréquence $\mathbf{f_e = 10\ kHz}$, lui applique l'algorithme de filtrage : $\mathbf{y_n = 2x_n + x_{n-1}}$ et le convertit à nouveau en signal analogique.



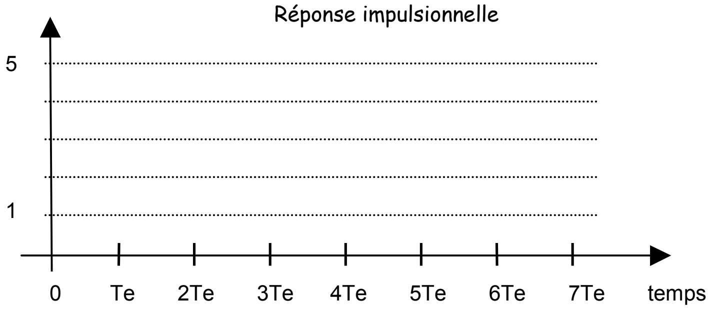
1) Le signal numérique x_n est composé des échantillons donnés dans le tableau. En déduire les valeurs décimales des échantillons x_n et tracer l'allure du signal échantillonné x*(t). Calculer X(z).

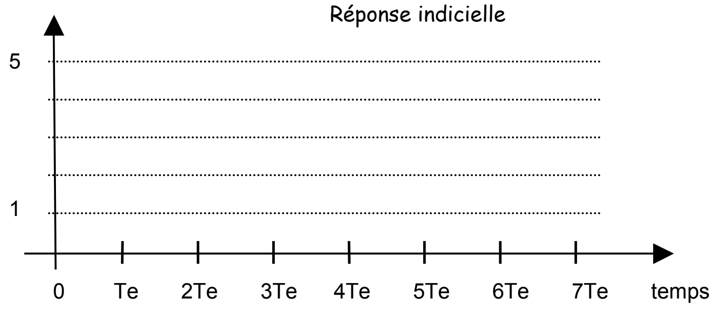
Instant	**Signal numérique d'entrée x_n**	**Valeurs décimales de x_n**	**Valeurs décimales de y_n**
t < 0	x_i = 0000 0000 si i < 0	x_i = 0 si i < 0	
t = 0	x_0 = 0000 0001	x_0 =	
t = Te	x_1 = 0000 0011	x_1 =	
t = 2Te	x_2 = 0000 0010	x_2 =	
t = 3Te	x_3 = 0000 0010	x_3 =	
t = 4Te	x_4 = 0000 0001	x_4 =	
t = 5Te	x_5 = 0000 0011	x_5 =	
t = 6Te	x_6 = 0000 0001	x_6 =	
t = 7Te	x_7 = 0000 0001	x_7 =	
t = 8Te	x_8 = 0000 0010	x_8 =	
t = 9Te	x_9 = 0000 0000	x_9 =	
t ≥10Te	x_j = 0000 0000 si j ≥ 10	x_j = si j ≥ 10	



2) Calculer les échantillons y_n en appliquant l'algorithme de filtrage aux échantillons x_n et tracer l'allure du signal y*(t).

3) Tracer les réponses impulsionnelle et indicielle de ce filtre numérique. A partir de la réponse indicielle, déterminer l'amplification en continu To de ce filtre.



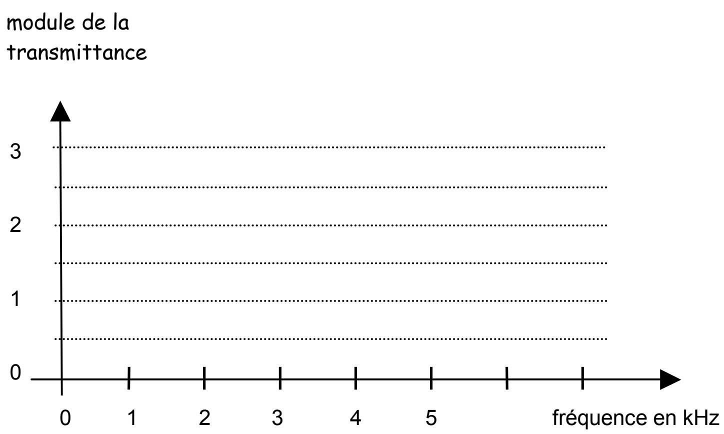


4) Calculer la transformée en z de la réponse impulsionnelle et en déduire la transmittance T(z) de ce filtre numérique.

5) Calculer la transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$ de ce filtre et en déduire l'expression du module et de l'argument de cette transmittance.

6) Remplir le tableau ci-dessous et tracer la courbe du module de la transmittance.

f en kHz	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
ITI						



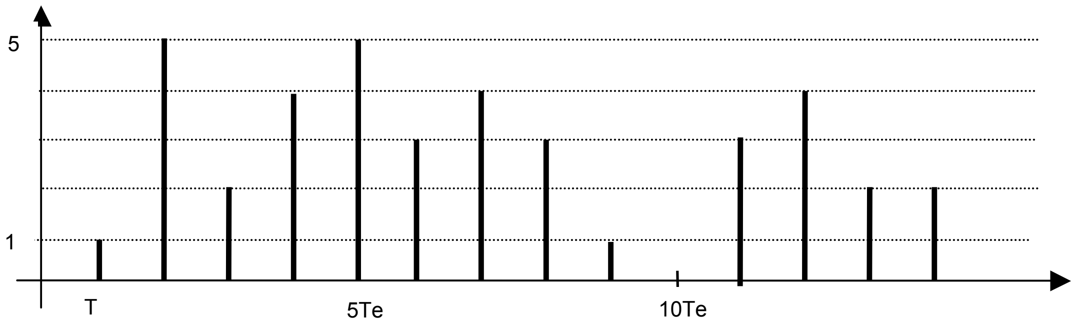
En déduire le type du filtre (passe-haut, passe-bas ou passe-bande), estimer graphiquement sa fréquence de coupure f_c et retrouver la valeur de son amplification en continu To.

NUM5- Etude d'un filtre à moyenne pondérée

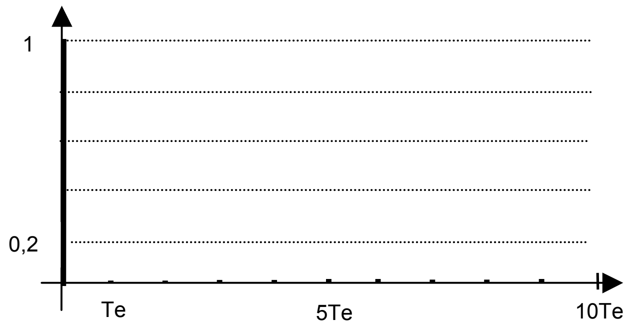
maîtriser les étapes de l'étude d'un filtre numérique

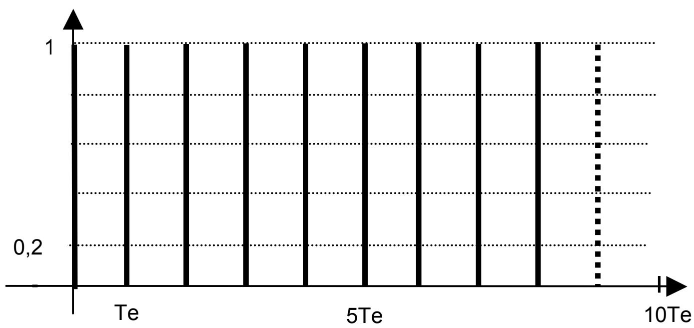
On considère le filtre défini par son algorithme : $\mathbf{y_n = 0{,}5.x_n + 0{,}3.x_{n-1} + 0{,}2.x_{n-2}}$ avec fe = 10 kHz

1) Tracer la réponse du filtre au signal suivant :



2) Tracer la réponse impulsionnelle et la réponse indicielle de ce filtre.





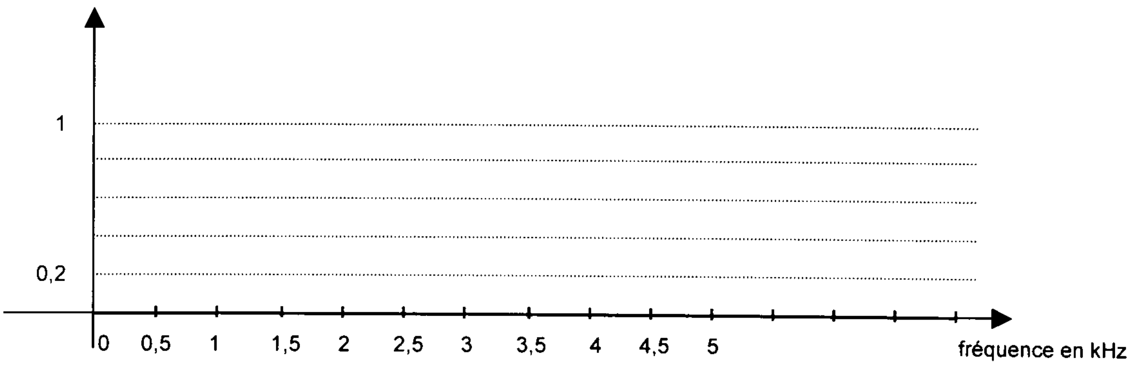
3) Combien de termes non nuls comporte sa réponse impulsionnelle ? quel est le type de ce filtre : passe-bas, passe-haut passe-bande ? quelle est l'amplification To en continu de ce filtre ?

4) A partir de la réponse impulsionnelle, établir l'expression de sa transmittance T(z).

5) Montrer que : $\underline{T}(jf) = 0{,}5 + 0{,}3.\cos(2\pi f/fe) + 0{,}2.\cos(4\pi f/fe) - j\,[\,0{,}3.\sin(2\pi f/fe) + 0{,}2.\sin(4\pi f/fe)\,]$

6) En utilisant le tableau de valeurs ci-dessous, tracer la courbe du module T de la transmittance en fonction de la fréquence et en déduire la transmittance en continu To du filtre, le type du filtre et sa fréquence de coupure.

fréquence	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
T	1	0,97	0,93	0,75	0,6	0,42	0,30	0,26	0,32	0,38	0,40



NUM6- Etude d'un filtre numérique passe-bas

comparer un filtre numérique avec des filtres analogiques connus

Un signal analogique x(t) est échantillonné à la fréquence fe = 10 kHz puis traité par un filtre moyenneur dont l'algorithme s'écrit :

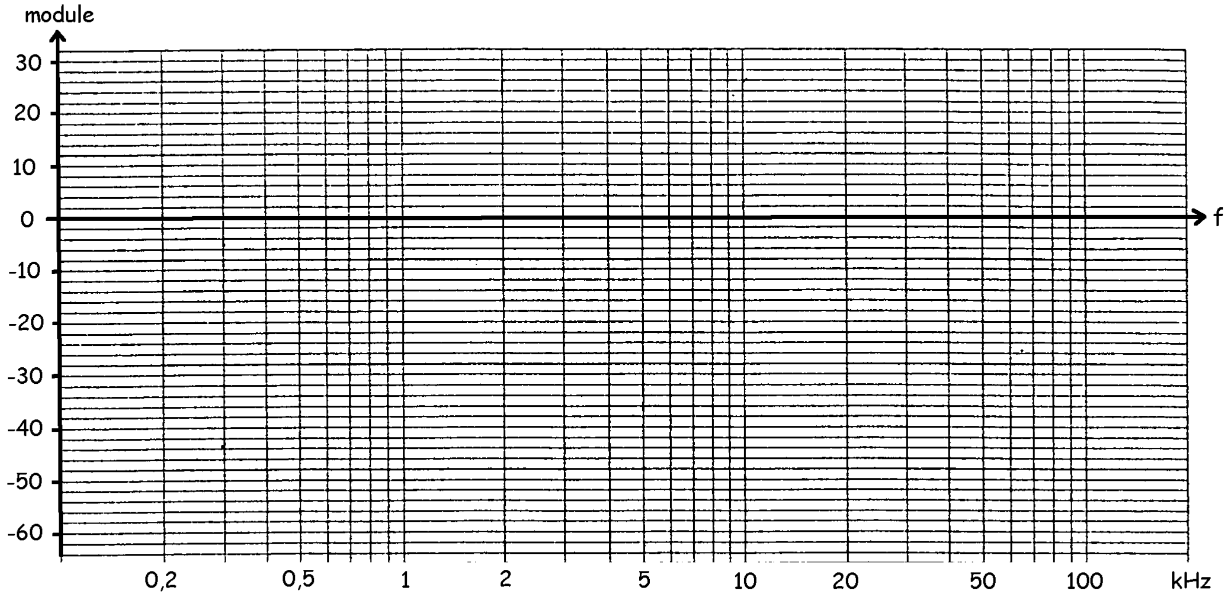
$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3}$$

1) Donner la transmittance H(z) de ce filtre, puis la transmittance complexe $\underline{H}(j\omega)$.

2) Montrer que le module de la transmittance s'écrit : $$\left|\underline{H}(jf)\right| = \frac{1}{3}\sqrt{3 + 4\cos(2\pi\frac{f}{f_e}) + 2\cos(4\pi\frac{f}{f_e})}$$

3) Compléter le tableau suivant et tracer la courbe du gain H_{dB} en fonction de la fréquence.

f_{kHz}	0,5	1	1,5	2	3	3,33	4	5	10
IHI									
H_{dB}									



Quelle est la fréquence d'utilisation maximale f_{max} de ce filtre ? quelle est sa fréquence de coupure f_c ?

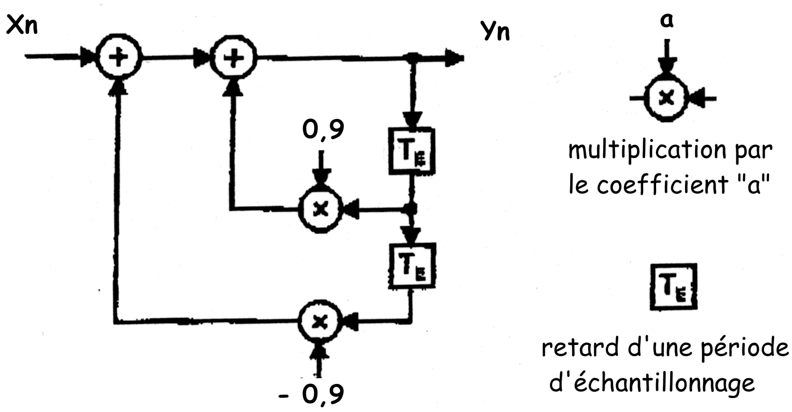
4) Dessiner sur la même feuille les diagrammes asymptotiques des filtres passe-bas du 1er et du 2ème ordre ayant la même fréquence de coupure que le filtre numérique étudié. Dans la bande 0-3000Hz, à quel filtre analogique ce filtre numérique est-il équivalent ?

NB : on rappelle que 2cosacosb = cos(a+b) + cos(a-b) et 2sinasinb = -cos(a+b) + cos(a-b)

NUM7- Caractérisation d'un filtre inconnu

trouver les caractéristiques d'un filtre de structure donnée

Un système de réception utilise un filtre numérique dont la structure est la suivante :



1) Etablir l'algorithme de calcul de ce filtre numérique.

2) Avec Xnum, tracer la courbe de réponse et en déduire le type du filtre et ses caractéristiques (f_e = 11 kHz).

3) Etablir sa transmittance T(z) et en déduire la valeur de sa transmittance en continu T_0.

4) Retrouver la valeur de T_0 sur la réponse indicielle simulée avec Xnum et sur la courbe de réponse.

Exercice NUM1 :

1) $Y(z)=1+2.z^{-1}+z^{-2}$ 2) $Y^*(p) = 1 + 2.e^{-Tep} + 1.e^{-2Tep}$

3) On passe de la transformée de Laplace d'un signal échantillonné à sa transformée en z par un simple changement de variable :

$$z = e^{Tep}$$

4) $X(z)=1+0,5.z^{-1}$ la transmittance s'écrit donc : $T(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+0,5z^{-1}}=\dfrac{z^2+2z+1}{z(z+0,5)}$

5) $y_n = -0,5.y_{n-1} + x_n + 2x_{n-1} + x_{n-2}$ réponse à un échelon : 1 2,5 2,75 2,625 2,69 2,65 ….

La transmittance en continu est donnée par la valeur finale de y_n pour $x_n = 1$ soit environ 2,65

6) T(z) a un pôle à 0 et un autre à –0,5 qui sont tous deux à l'intérieur du cercle unité : T(z) est donc stable

7) La transmittance en continu se retrouve par le calcul en faisant p=0 soit z=1 : T(1) = 4/1,5 = 2,66

8) $T(p)=\dfrac{1+2e^{-Tep}+e^{-2Tep}}{1+0,5e^{-Tep}}$ d'où $\underline{T}(j\omega)=\dfrac{1+2\cos\omega T_e-2j\sin\omega T_e+\cos 2\omega T_e-j\sin 2\omega T_e}{1+O,5\cos\omega T_e-j\sin\omega T_e}$

Exercice NUM2 :

1) Le spectre des vibrations se trouve entre 0 et 30 Hz

2) Le spectre du signal échantillonné est constitué par la répétition du spectre du signal initial autour de tous les multiples de la fréquence d'échantillonnage.

3) Le 50 Hz échantillonné à f_e = 70 Hz se retrouve replié à 20 Hz, et se superpose au spectre des vibrations.

4) Capteur, ampli adaptateur de niveau, filtre passe-bas anti-repliement coupant entre 30 et 35 Hz avec une pente raide après la coupure, échantillonneur-bloqueur, convertisseur analogique-numérique.

Exercice NUM3 :

1) Séquence y_n : 0,5 3 3,5 3 4,5 ….

2) 3) 4) Réponse impulsionnelle : 0,5 0,5 0 0 elle comporte deux termes non nuls ⇒ réponse impulsionnelle finie

5) Réponse indicielle : 0,5 1 1 1 …. 6) Amplification en continu égale à 1

7) Ce filtre passe le continu, c'est donc un passe-bas

Exercice NUM4 :

1) 2)

Instant	**Signal numérique d'entrée x_n**	**Valeurs décimales de x_n**	**Valeurs décimales de y_n**
t < 0	x_i = 0000 0000 si i < 0	$x_i = 0$ si i < 0	0
t = 0	x_0 = 0000 0001	$x_0 = 1$	2
t = Te	x_1 = 0000 0011	$x_1 = 3$	7
t = 2Te	x_2 = 0000 0010	$x_2 = 2$	7
t = 3Te	x_3 = 0000 0010	$x_3 = 2$	6
t = 4Te	x_4 = 0000 0001	$x_4 = 1$	4
t = 5Te	x_5 = 0000 0011	$x_5 = 3$	7
t = 6Te	x_6 = 0000 0001	$x_6 = 1$	5
t = 7Te	x_7 = 0000 0001	$x_7 = 1$	3
t = 8Te	…………	…………	…………..

3) Réponse impulsionnelle : 2 1 0 0 …..

Réponse indicielle : 2 3 3 3 ….

4) $X(z) = 1$ $Y(z) = 2 + z^{-1}$ d'où : $T(z) = 2 + z^{-1}$

5) $T(p) = 2 + e^{-T_e p}$ et $T(j\omega) = 2 + e^{-j\omega T_e} = 2 + \cos(\omega T_e) + j\sin(\omega T_e)$

Le module vaut : $|\underline{T}(j\omega)| = \sqrt{(2+\cos(\omega T_e))^2+\sin(\omega T_e)^2} = \sqrt{5+4\cos(\omega T_e)}$ ou encore $|\underline{T}(jf)| = \sqrt{5+4\cos(2\pi\frac{f}{f_e})}$

L'argument s'écrit : $\arg(T(j\omega)) = arctg\frac{\sin(\omega T_e)}{2+\cos(\omega T_e)}$

6) La courbe montre que le filtre favorise les fréquences basses, avec une amplification de 3 en continu.

f en kHz	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
ITI	3	2,87	2,5	1,94	1,33	1

La fréquence de coupure se mesure lorsque T= 2,12 soit environ 2,5 kHz

Exercice NUM5 :

1) on applique l'algorithme pas à pas

2) Réponse impulsionnelle : 0,5 0,3 0,2 0 0 …

Réponse indicielle : 0,5 0,8 1 1 1 ….

3) La réponse impulsionnelle comporte 3 termes non nuls, c'est un filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre non-récursif.

L'amplification en continu est donnée par la réponse indicielle et vaut 1.

4) $T(z) = 0,5 + 0,3.z^{-1} + 0,2.z^{-2}$ 5) on remplace z par $e^{j\omega Te} = e^{2\pi f/fe}$

5) La fréquence de coupure mesurée graphiquement vaut environ : $f_c = 0,17.f_e$

Exercice NUM6 :

1) 2) $T(z) = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{3}$ on remplace z par $e^{j\omega Te} = e^{2\pi f/fe}$

3)

f_{kHz}	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**3**	**3,33**	**4**	**5**	**10**
IHI	**0,96**	**0,87**	**0,72**	**0,53**	**0,12**	**0**	**0,2**	**0,33**	**1**
H_{dB}	**-0,35**	**-1,2**	**-2,8**	**-5,5**	**-18,4**	**$-\infty$**	**-14**	**-9,6**	**0**

Le signal est échantillonné à 10 kHz, le signal à l'entrée ne dépasse donc pas 5 kHz.

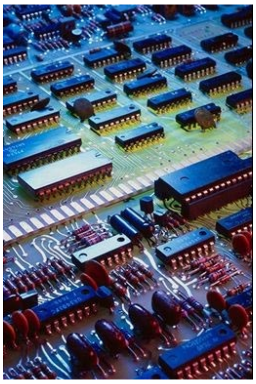
La fréquence de coupure est de l'ordre de 1,6 kHz.

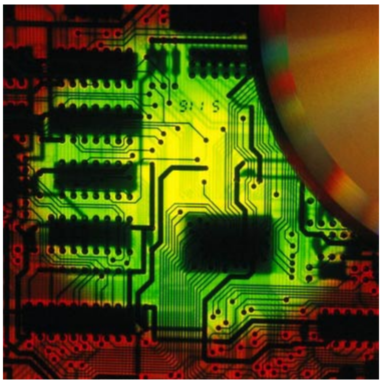
4) Dans la bande 0-3 kHz, ce filtre numérique est plus proche du second ordre analogique que du premier ordre.

Exercice NUM7 :

1) $y_n = 0,9.y_{n-1} - 0,9y_{n-1} + x_n$ 3) $T(z) = \frac{1}{1-0,9z^{-1}+0,9z^{-2}}$ To = 1 (pour z = 1)

Questionnaire





jean-philippe muller

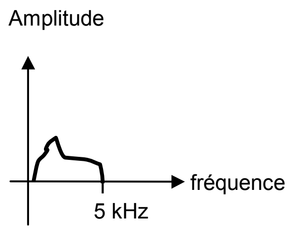
version janvier 2008

Questions

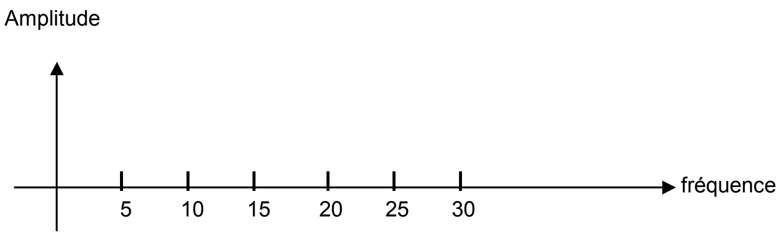
1 Lorsqu'une personne parle devant un microphone, le signal qui en sort :

	Vrai	Faux
a) contient toutes les fréquences du continu au MHz	☐	☐
b) ne contient qu'une seule fréquence	☐	☐
c) a une amplitude qui dépend du niveau sonore	☐	☐
d) a une fréquence qui dépend du niveau sonore	☐	☐
e) nécessite une bande passante de 50Hz à 15 kHz pour une reproduction Hi-fi	☐	☐
f) se contente d'une bande passante de 300Hz à 3 kHz pour une reproduction correcte	☐	☐

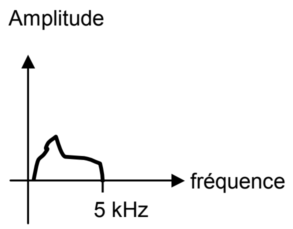
2 Un signal analogique x(t) dont le spectre est représenté ci-dessous est échantillonné à la fréquence f_e . Tracer l'allure du spectre du signal échantillonné x*(t) pour les 3 valeurs de f_e proposées.



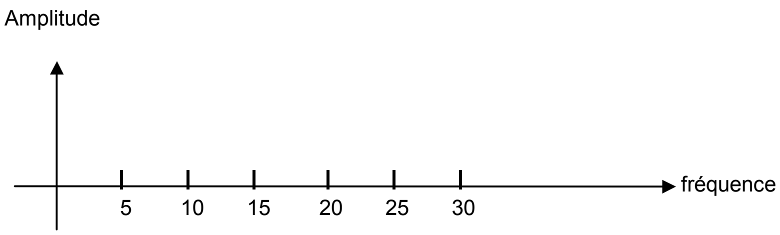
Spectre de x(t)



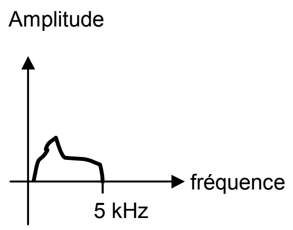
Spectre du signal échantillonné à 7,5 kHz



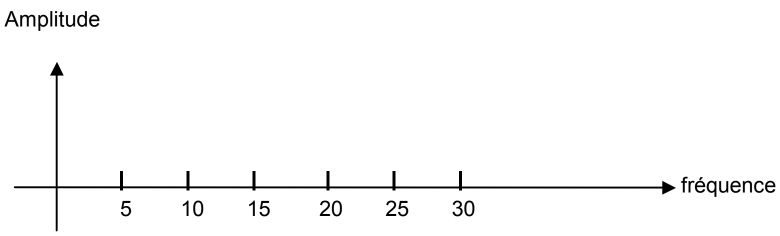
Spectre de x(t)



Spectre du signal échantillonné à 10 kHz



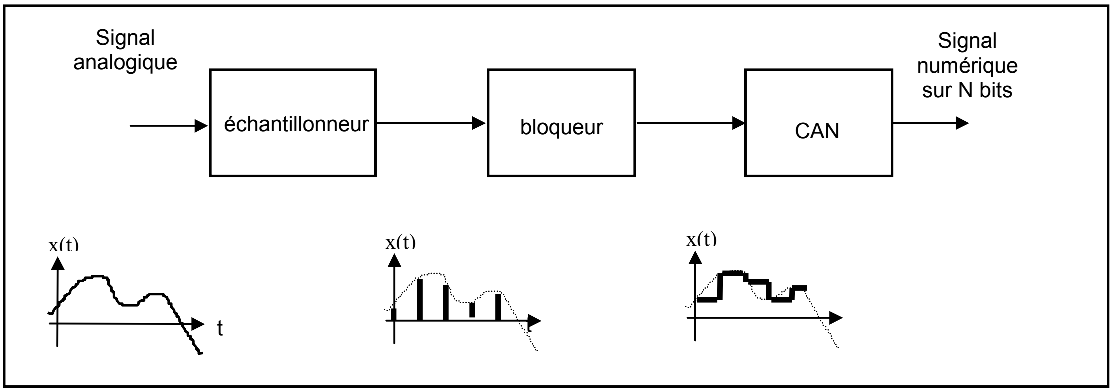
Spectre de x(t)



Spectre du signal échantillonné à 15 kHz

	Vrai	Faux
a) aucune de ces valeurs de f_e ne crée de problème de repliement de spectre	☐	☐
b) f_e = 10 kHz est le meilleur choix possible	☐	☐
c) f_e = 15 kHz est le meilleur choix possible	☐	☐

3 Le circuit d'acquisition d'un signal analogique audio (de 20 Hz à 20 kHz) a la structure suivante :



	Vrai	Faux
a) on peut échantillonner à une fréquence fe beaucoup plus grande que 20 kHz	☐	☐
b) si on échantillonne à 44 kHz, on perdra un peu de qualité dans les aiguës	☐	☐
c) il faut au minimum échantillonner à un peu plus que 20 kHz	☐	☐
d) le bloqueur maintient le signal constant à l'entrée du CAN pendant les conversions	☐	☐
e) le choix du nombre de bits N sera déterminant pour la qualité du système	☐	☐

4 Le circuit précédent est utilisé pour l'acquisition d'un signal dont le spectre va du continu à 5 kHz, la fréquence d'échantillonnage a été choisie à 12 kHz.

	Vrai	Faux
a) le choix de la fréquence d'échantillonnage est correct	☐	☐
b) l'information entre les échantillons est perdue, d'où dégradation de la qualité	☐	☐
c) le filtre passe-bas anti-repliement est placé après l'échantillonneur	☐	☐
d) la fréquence de coupure de ce filtre doit être légèrement supérieure à 5 kHz	☐	☐
e) la pente de ce filtre doit être la plus raide possible après la coupure	☐	☐

5 Le signal téléphonique est échantillonné à son arrivée au central téléphonique à f_e = 8 kHz et converti en mots de 8 bits sous forme série :

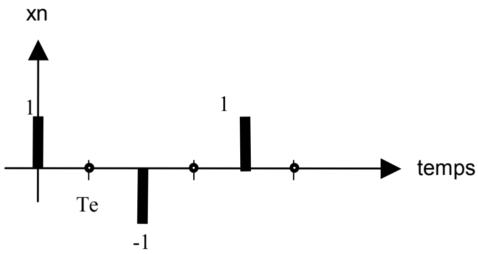
	Vrai	Faux
a) le débit numérique correspondant est D = 16 kbits/s	☐	☐
b) la bande passante de la voie téléphonique analogique est de 8 kHz	☐	☐
c) à l'entrée du central, le signal analogique est filtré en-dessous de 4 kHz	☐	☐
d) vue la qualité du microphone et de la ligne téléphonique, on n'a pas besoin de filtre à l'entrée du central	☐	☐
e) la bande passante du signal numérique s'étend jusqu'à 64 kHz	☐	☐
f) c'est seulement à cause du filtrage que la qualité n'est pas celle d'un CD audio	☐	☐
g) le signal ADSL subit également ce traitement à l'arrivée au central	☐	☐

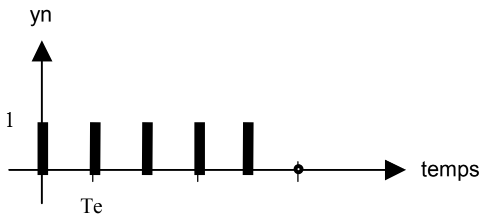
Réponses

N°	Réponses justes	Commentaires
1	c, f	a) e) les signaux audio vont de 20Hz à 20 kHz b) le signal vocal contient de nombreuses fréquences d) la fréquence correspond à la hauteur du son, pas au niveau
2	c	a f_e = 7,5 kHz, on a un problème de repliement de spectre f_e =10 kHz est la fréquence d'échantillonnage minimale f_e = 15 kHz est le meilleur choix
3	a, d, e	a) b) et c) un échantillonnage trop rapide donne un grand nombre d'échantillons par seconde, ce qui encombre inutilement le support de stockage ou de transmission sans gain de qualité : d'après Shannon, il suffit d'échantillonner à une fréquence légèrement supérieure à 20KHz e) le rapport S/B = 6N+2, la qualité dépend donc directement de N
4	a, d, e	c) le filtre anti-repliement doit être bien-sûr placé avant l'échantillonneur
5	c	a) le débit d'un signal téléphonique numérique est de 64 kbits/s e) le signal numérisé est carré, son spectre est donc en théorie infini

Questions

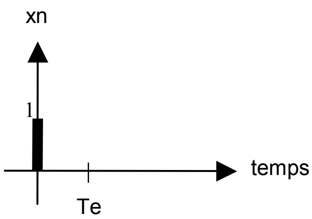
1 On s'intéresse aux transformées en z des deux signaux échantillonnés suivants :

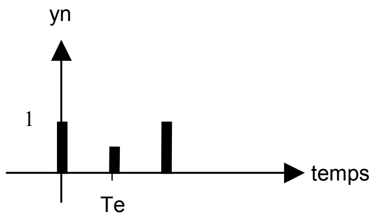




	Vrai	Faux
a) la transformée s'écrit : $X(z) = 1-z^{-1}+z^{-2}$	☐	☐
b) la transformée s'écrit : $X(z) = 1-z^{-2}+z^{-4}$	☐	☐
c) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1+5z^{-1}$	☐	☐
d) la transformée s'écrit : $Y(z) = 1+z^{-1}+\ldots. +z^{-4}$	☐	☐

2 Un filtre numérique attaqué par une séquence impulsion x_n répond par la séquence y_n suivante :





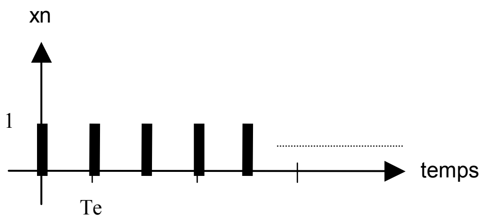
	Vrai	Faux
a) la transmittance de ce filtre s'écrit : $H(z) = 1 + 0{,}5.z^{-1}+ z^{-2}$	☐	☐
b) son algorithme s'écrit : $y_n = 2.x_n + x_{n-1} + 0{,}5.x_{n-2}$	☐	☐
c) la transmittance en continu du filtre vaut Ho = 1,5	☐	☐
d) il s'agit d'un filtre non récursif à réponse impulsionnelle infinie	☐	☐
e) pour certains types d'entrées, le filtre peut devenir instable	☐	☐

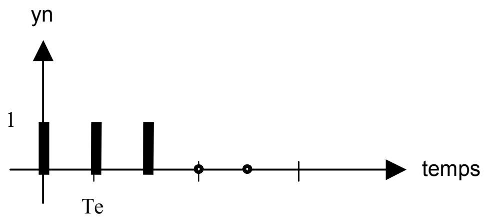
3 Un signal analogique x(t) est échantillonné à la fréquence fe = 10 kHz puis traité par un filtre moyenneur dont l'algorithme et la transmittance s'écrivent :

$$y_n = \frac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}}{3} \quad \text{et} \quad |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{3}\sqrt{3 + 4\cos(2\pi\frac{f}{f_e}) + 2\cos(4\pi\frac{f}{f_e})}$$

	Vrai	Faux
a) un filtre moyenneur est toujours un filtre passe-bas	☐	☐
b) la fréquence des signaux à l'entrée de ce filtre peut monter jusqu'à 10 kHz	☐	☐
c) la courbe de gain utile de ce filtre est périodique et de période 1/fe	☐	☐
d) on voit sur l'algorithme que l'amplification en continu de ce filtre vaut $T_0 = 1$	☐	☐
e) on voit sur la transmittance que l'amplification en continu de ce filtre vaut $T_0 = 1$	☐	☐

4 Un filtre numérique attaqué par un signal xn en échelon répond par le signal yn suivant :





	Vrai	Faux
a) ce filtre est un passe-bas	☐	☐
b) ce filtre a une transmittance H(z) = $1 – z^{-3}$	☐	☐
c) c’est un filtre à réponse impulsionnelle finie	☐	☐
d) ce filtre a une transmittance statique égale à 1	☐	☐

5 Un filtre numérique est défini par sa transmittance :

$$H(z) = \frac{z^2 + 3z - 1}{z^2 + 2}$$

	Vrai	Faux
a) sa transmittance statique vaut 2	☐	☐
b) l’algorithme correspondant à ce filtre s’écrit : $y_n = -2y_{n-2} + x_n + 3x_{n-1} – x_{n-2}$	☐	☐
c) ce filtre a 2 pôles	☐	☐
d) ce filtre est instable	☐	☐

6 Un filtre numérique est caractérisé par l’algorithme : $y_n = 0{,}9.y_{n-1} – 0{,}1.x_{n-2}$

	Vrai	Faux
a) sa transmittance s’écrit : $H(z) = -0{,}1.z^{-1}/(1-0{,}9.z^{-1})$	☐	☐
b) ce filtre est stable	☐	☐
c) sa transmittance en continu est égale à -1	☐	☐
d) c’est un filtre à réponse impulsionnelle infinie	☐	☐

Réponses

N°	Réponses justes	Commentaires
1	b, d	
2	a	e) un filtre non récursif est toujours stable
3	a , d, e	c) avec fe = 10 kHz, le signal à l'entrée ne dépasse jamais 5 kHz, seule la portion de la courbe de gain comprise entre 0 et 5kHz a une signification, la courbe de gain n'est donc pas périodique
4	b et c	a) et d) en régime permanent (après quelques périodes Te de régime transitoire) le signal de sortie est nul pour une entrée égale à 1, la transmittance statique est donc nulle et le filtre passe haut
5	b, c, d	a) la transmittance statique est obtenue pour ω=0, soit z=1 et vaut Ho = 1 d) les 2 pôles $\pm$ 1,414j sont à l'extérieur du cercle unité, le filtre est donc instable
6	b, c, d	a) sa transmittance s'écrit : $H(z) = -0{,}1.z^{-2}/(1-0{,}9.z^{-1})$ d) le calcul des échantillons de sortie avec l'algorithme montre que la réponse impulsionnelle est formée d'une infinité de termes. C'est de toutes façons un filtre récursif puisque la sortie dépend des sorties précédentes.